

Grado Universitario en Ingeniería en Tecnologías
Industriales

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría
de Estructuras
Curso 2017-2018

Trabajo Fin de Grado

“Oscilaciones no lineales de membranas hiperelásticas sometidas a presión interna”

Alfonso de la Vega Esteban

Tutor

José A. Rodríguez Martínez

Leganés, 2 de julio del 2018



[Incluir en el caso del interés de su publicación en el archivo abierto]

Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento – No Comercial – Sin Obra Derivada**

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento oscilatorio que presenta una membrana esférica de pared delgada modelizada empleando un material hiperelástico, cuando se encuentra sometida a una presión interna de valor constante.

Los materiales hiperelásticos, también conocidos como materiales elásticos de Green o elastómeros, son aquellos para los que se puede definir una función energía de deformación, cuya derivada respecto a un coeficiente cinemático representa la tensión. A medida que han avanzado los estudios en esta materia, se han formulado diversos modelos constitutivos para explicar este comportamiento. Las aplicaciones de estos materiales son muy diversas y abarcan gran cantidad de campos, desde la ingeniería civil, hasta la biomedicina pasando por la industria automovilística.

El estudio se ha dividido en dos partes: una analítica y otra numérica. En el trabajo analítico, se obtienen los modelos matemáticos que regulan el comportamiento de la membrana esférica. Por un lado, se estudia el caso de una presión interna cuyo valor aumenta progresivamente, para comprobar la validez de las expresiones calculadas. A continuación, se analiza el caso de la presión constante, que es la que provoca realmente las oscilaciones de la membrana. Para visualizar los resultados, se representan las funciones empleando los softwares Matlab y Excel.

La segunda parte del trabajo es el estudio numérico, que se realiza mediante simulaciones de elementos finitos haciendo uso del programa Abaqus. Se modela una esfera axisimétrica y se somete a las condiciones consideradas en los cálculos teóricos. De esta forma, se pueden comparar los resultados de ambos métodos y comprobar su precisión. Además, se analiza la validez de la hipótesis de pared delgada empleada durante todos los cálculos teóricos, observando las diferencias en los resultados a medida que se aumenta el espesor de la membrana.

En las conclusiones de este trabajo se incluyen la influencia del modelo constitutivo escogido en los resultados que se obtienen, la relación entre los resultados analíticos y los numéricos, y la validez de la hipótesis de pared delgada.

Palabras clave: Membrana, expansión, hiperelasticidad, presión, oscilaciones.

Abstract

The aim of this work is to study the oscillatory mechanical behaviour of a thin-walled hyper-elastic spherical membrane subjected to dynamic inflation.

Hyper-elastic materials, also known as Green-elastic materials, are those for whom it is possible to define a strain energy function, whose derivative with respect to a cinematic coefficient represents the stress. As a great amount of studies related to this field has been developed, different constitutive models have been formulated to explain this behaviour. There is a wide variety of applications of these materials and they can be used in different fields, from civil engineering to biomedicine or the automotive industry.

This project is divided into two sections: the analytic and the numerical. On the analytic work, the mathematical models that control the behaviour of the spherical membrane are theoretically obtained. Firstly, the case of an internal pressure whose value increases progressively is studied, in order to check the validity of the mathematical expressions previously calculated. Secondly, a constant pressure is considered. This is the case which causes the oscillations of the membrane. In order to visualize the results, functions' graphics are represented using the softwares Matlab and Excel.

The second part of the work is the numerical study, which is made using finite elements simulations, with the program Abaqus. An axisymmetric sphere is shaped and subjected to the conditions which were considered in the theoretical calculations. In this way, analytic and numerical results can be compared and it is possible to verify their accuracy. Furthermore, the validity of the thin-walled hypothesis, which has been used in every theoretical calculus, is analyzed, simply increasing the thickness of the membrane and noticing the discrepancies between the results.

The conclusions of this work include the influence of the constitutive model chosen in the final results, the connection between analytic and numerical results, and the validity of the thin-walled hypothesis.

Key words: Membrane, expansion, hyperelasticity, pressure, oscillations.

Agradecimientos

En primer lugar, debo mostrar toda mi gratitud a mi tutor **José A. Rodríguez Martínez**. Gracias por tu idea, tu apoyo, tu supervisión y tu entusiasmo. Has sido todo lo que esperaba de un tutor para este trabajo. Espero haber estado a la altura.

Por supuesto, también doy las gracias a mis padres **Alfonso** y **Rosa**, por dejarme siempre decidir, por permitirme acertar y equivocarme. A mi hermano **Jaime** por estar siempre conmigo, así como al resto de mi familia: abuelos, a los que están y a los que no, tíos y primos, por lo afortunado que soy de tenerles. Mención especial merece siempre mi primo **Javier Montero**, por encarnar la definición de familia y por ayudarme en todo momento.

No puedo olvidarme aquí de los compañeros y amigos que he conocido en la universidad: **Javi F.**, **Pablo**, **Cristian**, **José**, **Víctor**, **Juanma**, **Javi G.**, **Charif**. Debo hacer mención especial a **Daniel Cuesta Muñoz**, quien ha sido mi máximo apoyo a lo largo de la carrera y con quien he compartido prácticamente todo desde que nos conocimos hace ahora casi cuatro años. Me has enseñado mucho, aunque nunca lo reconoceré fuera de estas líneas.

También quiero mencionar al profesor **Pablo Álvarez Caudevilla**, del departamento de matemáticas, por ayudarme cuando lo necesité aun sin tener que hacerlo.

En general gracias a todo aquel que haya estado conmigo en algún momento de estos cuatro años.

Índice general

1.	Introducción	1
1.1.	Motivación y objetivos	5
1.2.	Aportaciones originales	6
1.3.	Marco regulador	6
1.4.	Estructura de la memoria	7
2.	Formulación analítica del problema	8
2.1.	Casos de expansión dinámica	12
2.1.1.	Caso I: aceleración de expansión constante	12
2.1.2.	Caso II: presión constante instantánea	12
2.2.	Modelos constitutivos	13
3.	Modelo numérico	16
4.	Análisis y resultados	18
4.1.	Resultados analíticos	18
4.1.1.	Caso I: aceleración de expansión constante	18
4.1.1.1.	Influencia de la aceleración de expansión	18
4.1.1.2.	Influencia de la función energía de deformación	20
4.1.2.	Caso II: presión constante instantánea	22
4.1.2.1.	Influencia de la presión de expansión	22
4.1.2.2.	Influencia de la función energía de deformación	26
4.2.	Resultados del modelo numérico	30
4.3.	Comparación de resultados	32

4.4. Validez de la hipótesis de pared delgada	34
5. Conclusiones	36
6. Trabajos futuros	37
7. Planificación y presupuestos	38
Anexos	40
A. Diagrama de Gantt	40
Bibliografía	42

Índice de figuras

1.	Ejemplo de gráfica tensión-deformación en hiperelasticidad	1
2.	Casquillos de goma en automóviles	2
3.	LRB: Esquema e instalación	3
4.	Representación LVAS instalado	4
5.	Representación del estado de carga	8
6.	Explicación del concepto de <i>stretch</i>	9
7.	Visualización de los modelos CAE con la presión aplicada	17
8.	Presión adimensional \bar{p} versus <i>stretch</i> circunferencial λ para distintas aceleraciones de expansión $\ddot{\lambda}$	19
9.	Presión adimensional \bar{p} versus <i>stretch</i> circunferencial λ para los seis modelos constitutivos ($\ddot{\lambda} = 1$ y $\ddot{\lambda} = 15$)	21
10.	Presión adimensional \bar{p} versus <i>stretch</i> circunferencial λ para los casos estático ($\dot{\lambda} = 0$ y $\ddot{\lambda} = 0$) y dinámico ($\dot{\lambda} = 0$ y $\ddot{\lambda} \neq 0$)	23
11.	Diagramas de fase, $\dot{\lambda}$ versus λ , para tres valores de presión adimensional \bar{p}	24
12.	Periodo de oscilación T versus presión adimensional \bar{p}	26
13.	Presión adimensional \bar{p} versus <i>stretch</i> circunferencial λ para el caso di- námico ($\dot{\lambda} = 0$ y $\ddot{\lambda} \neq 0$)	27
14.	Diagramas de fase, $\dot{\lambda}$ versus λ , para los seis modelos constitutivos ($\bar{p} = 2$)	28
15.	Periodo de oscilación T versus presión adimensional para los seis modelos constitutivos	29
16.	Visualización de resultados en Abaqus	30
17.	Gráfica desplazamiento vertical vs tiempo en Abaqus	31
18.	Comparación de los diagramas de fase	32

19. Diagramas de fase según el espesor de la membrana $H_o(m)$	34
A.1. Tareas del trabajo	40

Índice de tablas

1.	Parámetros del material en las funciones energía de deformación W . .	15
2.	Parámetros μ para definición de materiales tipo Ogden en Abaqus . . .	16
3.	Valores de <i>stretch</i> máximos según el espesor de la membrana	35
3.	Costes de personal	39
3.	Coste de herramientas informáticas	39

1. Introducción

Este trabajo busca demostrar, de forma analítica y a través de simulaciones numéricas, el comportamiento oscilatorio de una membrana de pared delgada de material hiperelástico, cuando está sometida a una presión interna de valor constante.

Los materiales hiperelásticos, también conocidos como elastómeros o materiales elásticos de Green, son aquellos para los cuales se puede definir una función energía de deformación, cuya derivada respecto a un coeficiente cinemático representa la tensión. A lo largo de toda la carrera se han estudiado materiales elastoplásticos con una zona de elasticidad lineal. Una vez se sobrepasa el límite elástico del material, éste entra en la zona plástica y sufre deformaciones que se convierten en permanentes. Sin embargo, los materiales hiperelásticos muestran gráficas tensión-deformación muy diferentes a las de estos otros materiales más comunes, como la que se puede observar en la Figura 1.

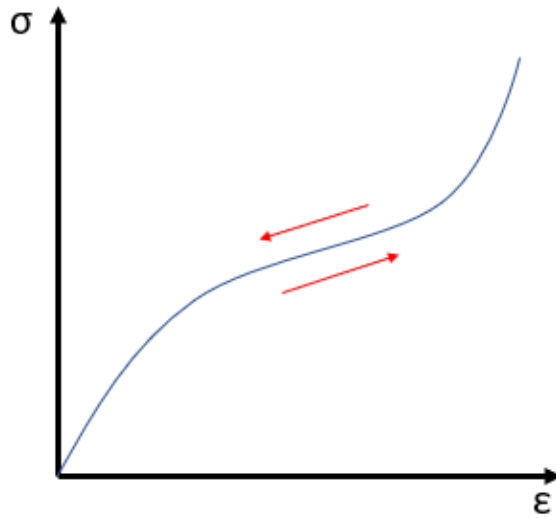


Fig. 1: Ejemplo de gráfica tensión-deformación en hiperelasticidad

Respecto a la función energía de deformación W , esta representa la energía almacenada por unidad de volumen, y se puede definir de distintas formas. En los materiales con elasticidad lineal se emplea únicamente la ley de Hooke que relaciona la tensión y la deformación utilizando el módulo de Young E como constante de proporcionalidad. Sin embargo, en hiperelasticidad se han formulado diferentes modelos constitutivos, cada uno con su formulación propia de la función energía de deformación W . En este trabajo se ha estudiado el comportamiento de la membrana según seis modelos constitutivos, que se detallan en la sección 2.2.

Respecto a las aplicaciones, desde la goma natural hasta los elastómeros sintéticos pasando por el caucho, los materiales hiperelásticos son utilizados en multitud de componentes: neumáticos, juntas, cimentación de edificios, calzado, aislantes de vibraciones o resonadores entre otras aplicaciones. Es decir, pueden ser empleados en una amplia variedad de campos. La información detallada a continuación está inspirada principalmente en la tesis doctoral de **Damián Aranda Iglesias** ([1]).

Un problema muy importante directamente relacionado con el comportamiento dinámico de los elastómeros es la cavitación. Este fenómeno ocurre en regiones del material sometidas a tensión hidrostática y puede dar lugar a fallos y roturas. Esto es importante de forma especial para los fabricantes de neumáticos. Si el aire interior provoca unas tensiones demasiado grandes sobre las paredes, se pueden generar defectos en el material, que principalmente es caucho. Si la tensión supera un valor crítico, estos defectos pueden crecer irremediablemente, superando la elasticidad del material y provocando así el fallo del neumático. La cavitación se ha convertido en objeto frecuente de estudios, principalmente debido a su importancia como agente iniciador de daños internos en los materiales. De hecho, experimentos como los expuestos en [2] vienen a confirmar que las propiedades elásticas no lineales de los materiales elastómeros como el caucho, desempeñan un papel muy significativo en el fenómeno de la cavitación.

Dentro de la industria automovilística se pueden encontrar más aplicaciones importantes de los materiales elastómeros. Por ejemplo, en la estructura de un vehículo se pueden encontrar numerosos casquillos que sirven para disminuir las vibraciones en el chasis. Estos casquillos suelen fabricarse empleando gomas sintéticas o poliuretano. Las propiedades elásticas de estos materiales, les convierten en idóneos para amortiguar la energía transmitida en la unión entre componentes en movimiento. Numerosos estudios sobre las propiedades dinámicas de estos casquillos se han llevado a cabo para mejorar su diseño: [3], [4] entre otros. En la Figura 2 se puede observar una imagen de los mencionados casquillos, así como un esquema de ejemplo de su aplicación.



Fig. 2: Casquillos de goma en automóviles

Otro importante campo de aplicación de este tipo de materiales es la ingeniería civil. Un ejemplo son los LRB (*Lead-rubber bearing*), unos dispositivos cilíndricos constituidos por capas de goma natural que se emplean en el aislamiento sísmico de edificios ([5]).

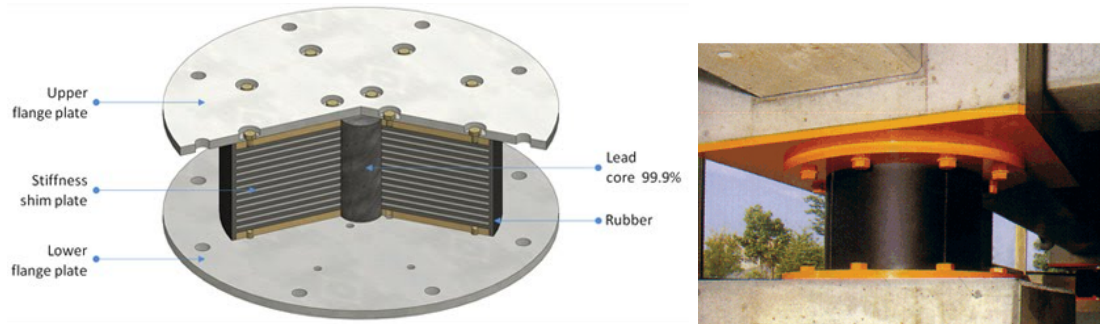


Fig. 3: LRB: Esquema e instalación

Los LRB se instalan entre los aceros de las cimentaciones de las estructuras, absorbiendo los movimientos provocados por un posible terremoto y disipando la energía que generan. Esto es posible gracias a la flexibilidad lateral de la goma, material que al mismo tiempo presenta una excelente rigidez vertical que le permite soportar, sin grandes deformaciones, el peso del edificio. Por lo tanto, los LRB transforman las vibraciones provocadas por los seísmos en movimientos más suaves que pueden evitar daños al edificio, y, además, debido a su elasticidad no lineal, devuelven al edificio a su posición inicial una vez cesa la acción del terremoto. En la Figura 3 se puede observar un esquema de los LRB, así como un ejemplo de su instalación en los cimientos de un edificio.

Otra posible tecnología relacionada con este tipo de materiales son los llamados polímeros electroactivos (PEA). La característica principal de estos materiales es que manifiestan algún tipo de reacción, como movimientos o cambios de tamaño y forma, al ser sometidos a la presencia de un campo eléctrico. Esto les convierte en idóneos para ser empleados como actuadores o sensores, por ejemplo, en músculos artificiales [6], en el campo de la óptica, en pantallas táctiles Braille, o en generación y almacenamiento de energía, entre otros.

También en el campo de la ingeniería biomédica hay espacio para los elastómeros. Un ejemplo importante son los dispositivos de asistencia externa al ventrículo izquierdo, o LVAS (*External left-ventricular assist systems*). Estos componentes son básicamente bombas que se colocan en el corazón con un extremo en el ventrículo izquierdo y otro en la vena aorta. La sangre fluye desde el ventrículo izquierdo hasta el LVAS, donde es bombeada hacia la vena aorta, que la transmite al resto del cuerpo. Aunque la cirugía puede ser peligrosa, la idea de emplear polímeros inteligentes cuya compresión

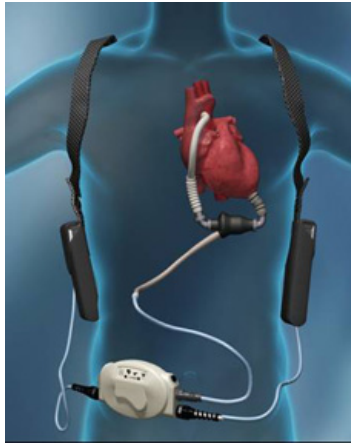


Fig. 4: Representación LVAS instalado

pueda ser controlada desde el exterior, puede disminuir las probabilidades de corazones débiles de sufrir una insuficiencia cardíaca congestiva, la cual es una de las principales causas de muerte en el mundo. Esta técnica está recabando apoyos gracias a estudios como [7].

Sin embargo, la aplicación más característica de estos materiales y probablemente la más relacionada con la temática de este trabajo son los resonadores. Un resonador es un dispositivo capaz de oscilar con determinadas amplitudes en función de la frecuencia a la que se le somete. Para una determinada frecuencia, el dispositivo entra en lo que se conoce como resonancia, fenómeno que le hace oscilar con grandes amplitudes. En este documento se demuestra más adelante, como la membrana esférica manifiesta un comportamiento oscilatorio cuando se le somete a una presión interna, lo cual sería bastante similar a la función de un resonador. Estos dispositivos tienen, a su vez, una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, los resonadores acústicos se emplean en el acondicionamiento acústico de recintos como elementos absorbentes selectivos, especialmente a bajas frecuencias. Otro ejemplo serían los resonadores micromecanizados, que pueden ser empleados en la detección de gases, entre otras aplicaciones [8]. Empleando técnicas de micromecanización de silicio, y combinándolas con materiales tipo elastómero para configurar la capa sensible, se pueden crear sensores químicos que permiten detectar gases y componentes volátiles. De esta forma, se puede sustituir el factor humano, necesario para detectar olores y aromas en industrias como la alimentaria o la cosmética, así como otras técnicas como la cromatografía de gases o la espectrometría de masas, que requieren tiempo y que presentan un umbral de detección por debajo del cual no funcionan correctamente.

1.1. Motivación y objetivos

La motivación principal para realizar este trabajo es la ampliación de los conocimientos del alumno acerca de la elasticidad de materiales. Los materiales hiperelásticos presentan unas propiedades elásticas realmente interesantes que generalmente no son estudiadas en profundidad a lo largo del grado universitario. Además, es un tema sobre el que se sigue investigando en la actualidad y que tiene grandes posibilidades. Como se ha expuesto en la sección 1, los materiales hiperelásticos o elastómeros tienen aplicaciones en una gran variedad de campos: ingeniería civil y de edificación, biomedicina o industria automovilística entre otros. La realización de este trabajo supone además emplear especialmente tres herramientas muy desarrolladas en la carrera: el cálculo matemático, Matlab y Abaqus. El hecho de obtener beneficio de lo aprendido en estos cuatro años añade un gran valor al proyecto.

El objetivo principal del trabajo es demostrar que una esfera constituida por material hiperelástico presenta un comportamiento oscilatorio cuando se encuentra sometida a una presión interna de valor constante. Además, empleando el software de elementos finitos Abaqus, se podrán evaluar los límites de validez de la hipótesis de pared delgada, que se emplea en los cálculos teóricos.

Una vez finalizado este trabajo, se puede continuar el estudio considerando, por ejemplo, condiciones de anisotropía, o variando las formas geométricas para analizar tuberías u otras estructuras diferentes. Por lo tanto, existe la posibilidad de ampliar el proyecto en el futuro.

1.2. Aportaciones originales

El grueso de este trabajo, especialmente los cálculos teóricos, está basado en el artículo *The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation* [9], publicado en la *International Journal of Engineering Science*. Este artículo fue escrito por el tutor de este trabajo **J. A. Rodríguez Martínez**, y por **J. Fernández Sáez** y **R. Zaera**, todos vinculados a la Universidad Carlos III de Madrid.

También ha servido de gran ayuda, especialmente en la sección 1, la tesis doctoral de **Damián Aranda Iglesias**: *Dynamic radial deformations of nonlinear elastic structures* [1]. Esta tesis fue supervisada también por **J. A. Rodríguez Martínez**, y co-supervisada por **G. Vadillo Martín**.

A raíz de estas dos aportaciones principales, se han consultado otros artículos importantes como: *Non-linear elastic deformations* [10], o *Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids* [11] para los cálculos teóricos; y otros estudios como *Cavitation in rubber: an elastic instability or a fracture phenomenon?* [2], o *Seismic analysis of structures* [5], para profundizar en las aplicaciones de los materiales hiperelásticos.

Respecto a la parte numérica de simulaciones de elementos finitos, es original prácticamente al completo. Se ha consultado el manual de usuarios de Abaqus [12] para cuestiones técnicas del programa, especialmente a la hora de la definición de los materiales.

1.3. Marco regulador

Este apartado, generalmente, recoge la normativa oficial a la que ha estado sujeta la realización del trabajo. Sin embargo, en este caso, el proyecto es íntegramente teórico y por lo tanto es difícil considerar algún tipo de norma.

Se podría considerar, por ejemplo, que los resultados obtenidos a través de este proyecto se obtuvieran de forma real en un laboratorio de ingeniería mecánica o de materiales. En estos casos sí habría que seguir la normativa oficial de estos laboratorios. También, si se emplease este estudio en aplicaciones reales como las descritas en la sección 1, habría que apoyarse por ejemplo en normativa referente a neumáticos si se estudiase el problema de la cavitación, o a normas médicas en el caso de los LVAS.

En definitiva, este proyecto, al ser teórico, no está sujeto a ningún tipo de norma ni marco regulador. Toda la regulación aparecería a la hora de aplicar las conclusiones del trabajo a casos reales que solucionaran problemas concretos.

1.4. Estructura de la memoria

En este apartado se va a explicar cómo se organiza el presente documento.

En la primera sección (1) se ha redactado una introducción para comprender principalmente qué son los materiales hiperelásticos y las aplicaciones que tienen en la actualidad. Además, se han incluido la motivación y los objetivos que se han encontrado para llevar a cabo el proyecto, así como los documentos en los que se ha basado su realización.

En el siguiente apartado (2) se expone la formulación teórica del problema, en la que se desarrolla ampliamente la concepción analítica del caso, y se obtienen las ecuaciones que gobiernan el proceso. Además, se introducen las situaciones dinámicas que se van a estudiar y los modelos constitutivos de hiperelasticidad empleados para resolverlas. A continuación, en la sección 3, se explica de igual manera cómo se ha planteado el problema de forma numérica, para ser resuelto a través de software de elementos finitos.

Tras plantear el problema, se procede a presentar los resultados, primero analíticos (4.1) y después numéricos (4.2 y 4.4), para después compararlos en la sección 4.3. Gracias a esto, se pueden extraer después las conclusiones generales del proyecto en la sección 5.

En los apartados finales del documento se incluye un capítulo referente a trabajos futuros (6) que pueden desprenderse de este estudio, y otro acerca de la planificación que se ha seguido para realizar el proyecto y un resumen de los presupuestos generales del mismo (7). Por último, se incluyen un anexo con un diagrama de Gantt para obtener las horas empleadas en el cálculo de presupuestos, además de la bibliografía.

2. Formulaci3n anal3tica del problema

El problema va a ser analizado en el caso de una membrana de forma esf3rica, constituida por un material el3stico no lineal, isotropo e incompresible de densidad ρ . Para realizar los c3lculos se van a seguir las indicaciones del art3culo [9]. Debido a la forma de la membrana, se trabajar3 en coordenadas esf3ricas, que se denotar3n como (R, Θ, Φ) en el caso de la membrana antes de deformar, y como (r, θ, ϕ) una vez deformada, para poderse diferenciar. De igual modo se proceder3 con las dimensiones de la esfera: R_o y H_o para denotar el radio medio de la membrana y su espesor respectivamente antes de la deformaci3n, r_o y h_o para despu3s.

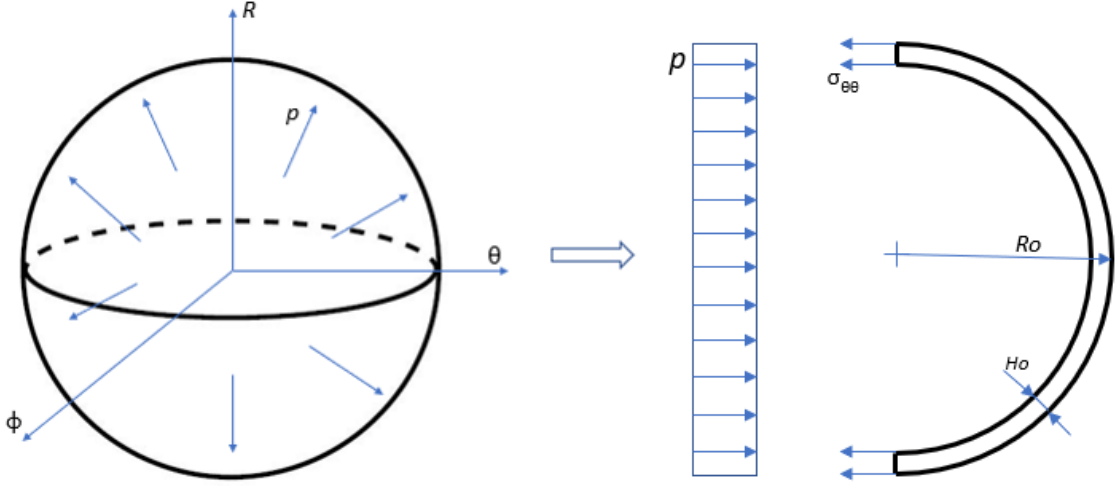


Fig. 5: Representaci3n del estado de carga

Para analizar el comportamiento de la membrana, se le somete a una presi3n interna de valor p , cuyo origen se encuentra en el centro de la esfera, y que se distribuye uniformemente hacia sus paredes. Las tensiones propias del tensor de tensiones de Cauchy se denotar3n como σ_{rr} en la direcci3n radial, $\sigma_{\theta\theta}$ en la circunferencial, y $\sigma_{\phi\phi}$ en la acimutal. La simetr3a esf3rica hace que los esfuerzos sean independientes de las coordenadas angulares y que, por lo tanto, sean iguales en todas las direcciones. De esta forma: $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$. Por su parte, de la hip3tesis de pared delgada se deduce que la tensi3n en la direcci3n radial σ_{rr} , cuyo valor m3ximo es p , se puede suponer igual a 0, ya que es muy inferior a $\sigma_{\theta\theta}$. Esto se puede demostrar f3cilmente realizando un equilibrio de fuerzas con el que se obtiene $\sigma_{\theta\theta}$:

$$p\pi r_o^2 = \sigma_{\theta\theta} 2\pi r_o h_o \quad ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pr_o}{2h_o} \quad (1)$$

Es decir, $\sigma_{\theta\theta}$ es el producto de la presión p por una constante $\frac{r_o}{2h_o} \gg \gg 1$. Por lo tanto, $\sigma_{\theta\theta} \gg \gg \sigma_{rr}$.

Haciendo uso de la segunda ley de Newton y asumiendo la conservación del momento lineal en la dirección radial, se puede plantear la ecuación de equilibrio de fuerzas en el caso de expansión dinámica:

$$\rho h_o \ddot{r}_o = -2\sigma_{\theta\theta} \frac{h_o}{r_o} + p \quad (2)$$

donde p es la presión de expansión y un punto superpuesto sobre una variable indica una derivada de dicha variable con respecto del tiempo.

A continuación, se va a introducir el concepto de *stretch* que será denotado por la letra λ . Suponiendo la incompresibilidad del material de la membrana, la variación del volumen tiene que ser nula tras producirse la deformación, lo que permite formular la siguiente igualdad:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (3)$$

que básicamente explica que el *stretch* en una dirección se compensa con los *stretch* en las otras dos, para que el volumen total se mantenga constante.

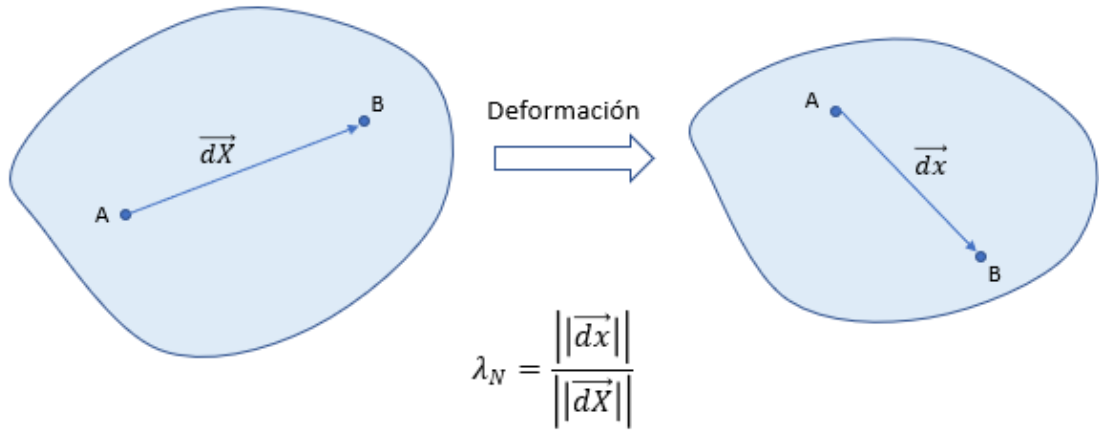


Fig. 6: Explicación del concepto de *stretch*

El cálculo de los *stretch* en el caso de la membrana esférica corresponde al cociente entre los espesores de esta en la dirección radial, y al cociente entre los radios tanto en la dirección circunferencial como en la acimutal (por simetría):

$$\lambda_1 = \frac{h_o}{H_o} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{r_o}{R_o}$$

A partir de este punto, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Introduciendo estas últimas expresiones en la ecuación 3 se obtiene la relación entre el *stretch* radial λ_1 y el *stretch* λ :

$$\lambda_1 \lambda^2 = 1 \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4)$$

Utilizando estas relaciones, se pueden expresar las dimensiones finales de la esfera en función de las iniciales, que son las que realmente podrán ser establecidas al iniciar la simulación:

$$\begin{aligned} h_o &= \lambda_1 H_o \quad ; \quad h_o = \frac{H_o}{\lambda^2} \\ r_o &= \lambda R_o \\ \ddot{r}_o &= \frac{d^2(\lambda R_o)}{dt^2} \quad ; \quad \ddot{r}_o = R_o \ddot{\lambda} \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora se puede reescribir la ecuación 2 incluyendo en ella las expresiones obtenidas de la ecuación 5:

$$\rho H_o R_o \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda^2} = -2 \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\lambda^3} \frac{H_o}{R_o} + p \quad (6)$$

De esta forma, se obtiene la expresión referida únicamente a las condiciones iniciales y los *stretch*.

A continuación, se va a simplificar la ecuación 6 introduciendo las siguientes variables adimensionales:

$$\tau = \frac{t}{t_o} \quad ; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{C_1^{M1}} \quad ; \quad \bar{p} = p \frac{R_o}{C_1^{M1} H_o}$$

siendo C_1^{M1} una constante del material con unidades de Pa similar al módulo de Young, pero no puede ser exactamente lo mismo porque la elasticidad de la membrana estudiada es necesariamente no lineal.

Por otro lado, se define la constante de tiempo t_o como:

$$t_o = R_o \sqrt{\frac{\rho}{C_1^{M1}}}$$

expresión que es aproximadamente la inversa de la velocidad de propagación de las ondas en un sólido elástico lineal, propiedad que responde a la fórmula: $v_o = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Introduciendo estas constantes en la ecuación 6 se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda^2} = \frac{-2\bar{\sigma}}{\lambda^3} + \bar{p} \quad (7)$$

A partir de este momento, un punto sobre una variable denota su derivada con respecto a la variable adimensional de tiempo τ .

De esta forma se ha obtenido una ecuación dependiente únicamente de parámetros adimensionales. Se puede expresar la ecuación 7 de forma más simplificada como:

$$\ddot{\lambda} = F(\lambda, \bar{p}) \quad (8)$$

donde

$$F(\lambda, \bar{p}) = -\lambda^2 g(\lambda) + \lambda^2 \bar{p} \quad (9)$$

siendo

$$g(\lambda) = \frac{2\bar{\sigma}}{\lambda^3} \quad (10)$$

una función que considera el comportamiento elástico no lineal del material, y cuyo valor depende del modelo constitutivo escogido.

2.1. Casos de expansión dinámica

Una vez obtenidas las ecuaciones que determinan el comportamiento de la membrana, se van a estudiar dos casos de expansión dinámica: el primero con una presión que se incrementa de forma constante, y el segundo con una presión constante que se aplica de forma instantánea (con un comportamiento similar al de una función de Heavyside). De esta manera, aunque de forma ideal, se podrá obtener una buena comparación entre los distintos modelos constitutivos. En ambos casos se partirá de las siguientes condiciones iniciales:

$$\lambda(0) = 1 \quad ; \quad \dot{\lambda}(0) = 0$$

que representan un *stretch* inicial igual a 1, es decir, deformación inicial nula, y una velocidad de expansión inicial igual a 0 (se parte del reposo), respectivamente.

2.1.1. Caso I: aceleración de expansión constante

En este primer caso, lo único que hay que hacer es recolocar los términos de la ecuación 9:

$$\bar{p} = g(\lambda) + \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda^2} \quad (11)$$

De esta forma se obtiene la presión \bar{p} como función de la función $g(\lambda)$, del *stretch* λ y de la aceleración de expansión $\ddot{\lambda}$ que será constante.

2.1.2. Caso II: presión constante instantánea

Para desarrollar este segundo caso, hay que hacer uso de la siguiente ley matemática:

$$\ddot{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\lambda}^2)}{d\lambda} \quad (12)$$

La demostración de esta expresión es sencilla, y empleándola se puede eliminar el término de la aceleración de expansión de las demás ecuaciones, ya que en este caso no será un valor constante. Aplicando esta expresión en la ecuación 8 se obtiene:

$$\frac{d(\dot{\lambda}^2)}{d\lambda} = 2F(\lambda, \bar{p}) \quad (13)$$

Como \bar{p} es un valor constante y por lo tanto no depende del tiempo, es sencillo obtener la velocidad de expansión $\dot{\lambda}$ como función únicamente del *stretch* λ , mediante integración:

$$\dot{\lambda} = \pm \sqrt{2 \int_1^\lambda F(\xi, \bar{p}) d\xi} \quad (14)$$

es importante señalar que los límites de integración se han definido atendiendo a que la variable de integración es el *stretch* λ que como mínimo tendrá un valor de 1 cuando las dimensiones final e inicial sean iguales, y como máximo tendrá el valor que se ha designado como λ correspondiente a la deformación que sufra la esfera. El parámetro ξ aparece como variable temporal solamente dentro de la integral.

Con el objetivo de ampliar el estudio al máximo, se puede apreciar que esta última ecuación 14 permite obtener el comportamiento temporal del *stretch* circunferencial, simplemente recordando que $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{d\tau}$:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^\lambda \frac{d\xi}{\sqrt{\int_1^\xi F(\xi, \bar{p}) d\xi}} \quad (15)$$

Dado que la hipótesis es que el comportamiento de la membrana va a ser periódico, si se considera τ como el tiempo adimensional transcurrido desde $\lambda = 1$ hasta el *stretch* máximo que puede llegar a sufrir la esfera denominado como $\lambda = \lambda_{max}$, se puede obtener la expresión del periodo T de las oscilaciones como 2τ abarcando así los movimientos de dilatación primero, y de contracción después:

$$T = 2\tau = \sqrt{2} \int_1^{\lambda_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\int_1^\xi F(\xi, \bar{p}) d\xi}} \quad (16)$$

2.2. Modelos constitutivos

Como se introdujo en la sección 1, los materiales hiperelásticos se caracterizan porque permiten definir una función de energía de deformación W cuya derivada con respecto a la deformación proporciona la tensión. Para definir esta función W se han formulado diferentes modelos constitutivos entre los que se van a estudiar seis en este trabajo: Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin, Yeoh y Ogden de orden 1, de orden 2 y de orden 3.

Antes de presentar las funciones W de los diferentes modelos se van a definir unos conceptos imprescindibles para su comprensión: los invariantes del tensor de Cauchy. En los casos en los que no se puede aplicar la hipótesis de pequeñas deformaciones, se define el tensor gradiente de la deformación como:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Las componentes nulas se deben a que las deformaciones se producen únicamente en las direcciones principales.

Partiendo de esto, se puede obtener el tensor de deformaciones de Cauchy (C) como el producto del tensor gradiente de la deformación por su traspuesta:

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

A partir de este tensor de Cauchy se obtienen los dos primeros invariantes como:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \frac{1}{\lambda^4} + 2\lambda^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2$$

Una vez definidos los invariantes, ya se pueden formular los seis modelos constitutivos que se van a estudiar:

- Neo-Hookeano: $W = C_{10}^{M1}(I_1 - 3)$
- Mooney-Rivlin: $C_{10}^{M2}(I_1 - 3) + C_{01}^{M2}(I_2 - 3)$
- Yeoh: $W = C_{10}^{M3}(I_1 - 3) + C_{20}^{M3}(I_1 - 3)^2 + C_{30}^{M3}(I_1 - 3)^3$
- Ogden:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{C_{i0}^{0K}}{\alpha_i^{0K}} (\lambda_1^{\alpha_i^{0K}} + \lambda_2^{\alpha_i^{0K}} + \lambda_3^{\alpha_i^{0K}} - 3)$$

- Ogden N=1: $W = \frac{C_{10}^{01}}{\alpha_1^{01}} (\lambda_1^{\alpha_1^{01}} + \lambda_2^{\alpha_1^{01}} + \lambda_3^{\alpha_1^{01}} - 3)$
- Ogden N=2: $W = \frac{C_{10}^{02}}{\alpha_1^{02}} (\lambda_1^{\alpha_1^{02}} + \lambda_2^{\alpha_1^{02}} + \lambda_3^{\alpha_1^{02}} - 3) + \frac{C_{20}^{02}}{\alpha_2^{02}} (\lambda_1^{\alpha_2^{02}} + \lambda_2^{\alpha_2^{02}} + \lambda_3^{\alpha_2^{02}} - 3)$
- Ogden N=3: $W = \frac{C_{10}^{03}}{\alpha_1^{03}} (\lambda_1^{\alpha_1^{03}} + \lambda_2^{\alpha_1^{03}} + \lambda_3^{\alpha_1^{03}} - 3) + \frac{C_{20}^{03}}{\alpha_2^{03}} (\lambda_1^{\alpha_2^{03}} + \lambda_2^{\alpha_2^{03}} + \lambda_3^{\alpha_2^{03}} - 3) + \frac{C_{30}^{03}}{\alpha_3^{03}} (\lambda_1^{\alpha_3^{03}} + \lambda_2^{\alpha_3^{03}} + \lambda_3^{\alpha_3^{03}} - 3)$

En la Tabla 1 se muestran todas las constantes C y α que aparecen en las funciones energía de deformación W de los distintos modelos constitutivos. Todas ellas han sido extraídas del artículo [13], en el que se obtienen gracias a la calibración de los mismos datos experimentales.

Modelos	Parámetros
Neo-Hookeano	$C_{10}^{M1}(Pa) = 191999.034$
Mooney-Rivlin	$C_{10}^{M2}(Pa) = 210587.307$
	$C_{01}^{M2}(Pa) = 1504.76719$
Yeoh	$C_{10}^{M3}(Pa) = 190592.559$
	$C_{20}^{M3}(Pa) = -1634.89996$
	$C_{30}^{M3}(Pa) = 41.3399927$
Ogden de orden 1	$C_{10}^{01}(Pa) = 359237.938$
	$\alpha_1^{01} = 2.11120130$
Ogden de orden 2	$C_{10}^{02}(Pa) = 42073.4586$
	$\alpha_1^{02} = 3.60405498$
	$C_{20}^{02}(Pa) = 360636.118$
	$\alpha_2^{02} = -0.03270528$
Ogden de orden 3	$C_{10}^{03}(Pa) = 398206.801$
	$\alpha_1^{03} = 1.13176086$
	$C_{20}^{03}(Pa) = 5377.71517$
	$\alpha_2^{03} = 4.73211925$
	$C_{30}^{03}(Pa) = 7647.41545$
	$\alpha_3^{03} = -2.14619240$

Tabla 1: Parámetros del material en las funciones energía de deformación W

3. Modelo numérico

Paralelamente a la resolución analítica del problema, el objetivo de este trabajo es simular el proceso de expansión de la membrana esférica empleando un modelo CAE de elementos finitos, haciendo uso del software Abaqus. En esta sección se va explicar cómo se ha creado dicho modelo.

Como ya se ha comentado en la sección de introducción (1), esta parte de simulación se va a emplear con dos objetivos: demostrar los resultados analíticos y comprobar los límites válidos de la hipótesis de pared delgada. Por ello, en el módulo *Part* se deben crear dos archivos: una esfera de pared delgada utilizando elementos tipo *Wire* (unidimensionales), y otra tipo *Shell* que permita incrementar progresivamente el espesor. En ambos casos se emplea el sistema axisimétrico. Al radio exterior de la esfera se le ha dado en este caso un valor de 0.5 m.

En el módulo de *Properties* el primer paso es definir el material para los seis modelos constitutivos. La densidad no afectará a los resultados, pero se ha escogido para todos los casos un valor de 1000 kg/m^3 similar a la densidad del caucho. Para definir la hiperelasticidad, solo es necesario seleccionar el modelo constitutivo deseado de entre los disponibles e introducir los coeficientes C y α disponibles en la Tabla 1. Es importante señalar que, para los modelos de Ogden, se deben introducir unos parámetros μ que se calculan a partir de las anteriores constantes, y que se presentan en la siguiente tabla:

Modelo	Parámetro μ
Ogden de orden 1	$\mu_1(Pa)=379211.8009$
Ogden de orden 2	$\mu_1(Pa)=75817.529$
	$\mu_2(Pa)=-5897.352609$
Ogden de orden 3	$\mu_1(Pa)=225337.4358$
	$\mu_2(Pa)=12723.99474$
	$\mu_3(Pa)=-8206.412459$

Tabla 2: Parámetros μ para definición de materiales tipo Ogden en Abaqus

Por su parte, a los parámetros D se les asigna un valor de 0, ya que es el método para que el programa considere el material como incompresible, lo cual es una de las hipótesis iniciales del problema. A pesar de esto, la incompresibilidad total es imposible de lograr empleando Abaqus, ya que necesita asignar un mínimo valor a este parámetro D para poder realizar los cálculos. Esto se explicará más ampliamente en la sección 4.2.

Dentro de este mismo módulo hay que definir las secciones. En el caso de la membrana de pared delgada, se creará una sección tipo *Shell* por cada modelo, para poder comparar los resultados. Se ha decidido introducir en este caso un valor para el espesor de 1 mm. En el caso en el que se irá aumentando el espesor de la membrana para comprobar la hipótesis de pared delgada, la sección se escoge tipo *Solid*. En este segundo caso, el espesor se irá variando en el boceto del módulo *Part*.

Respecto al módulo *Load*, habrá que definir una presión distribuida uniformemente sobre la pared interna de la membrana. Para conocer este valor en Pascales de la presión p se empleará la fórmula de la presión adimensional \bar{p} disponible también en la sección 2, ya que esta presión es la que se utilizará en todos los cálculos analíticos.

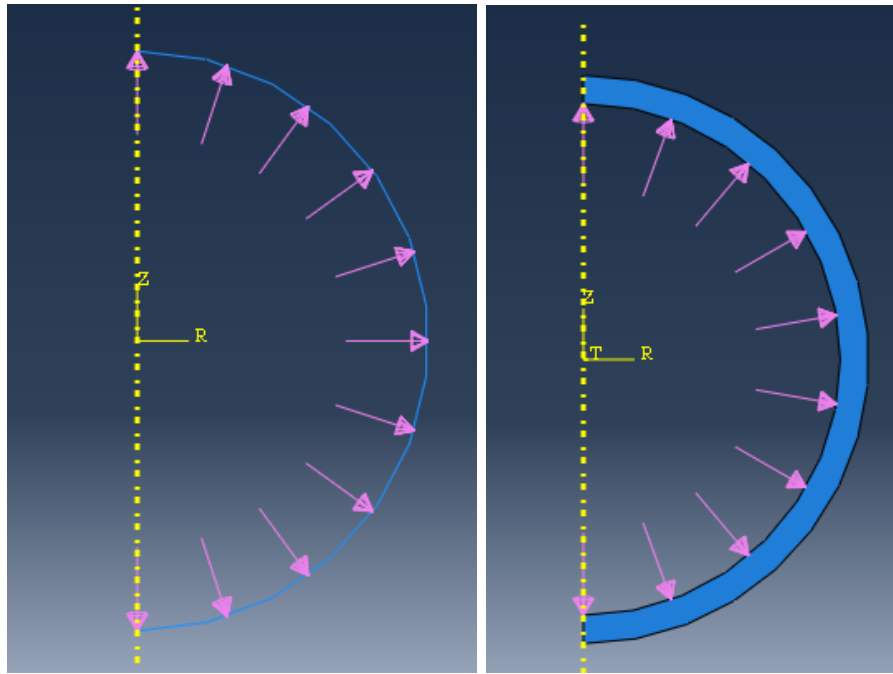


Fig. 7: Visualización de los modelos CAE con la presión aplicada

4. Análisis y resultados

4.1. Resultados analíticos

Para poder desarrollar las expresiones de los diferentes modelos constitutivos, se va a seguir la ecuación disponible en [11], donde se demuestra que la tensión circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ cumple la expresión:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\lambda(\lambda - \frac{1}{\lambda^5})(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}) \quad (17)$$

El estudio se va a dividir en los dos casos de expansión presentados en la sección 2.1.

4.1.1. Caso I: aceleración de expansión constante

4.1.1.1. Influencia de la aceleración de expansión

En esta sección se podrá analizar la respuesta de la membrana esférica ante diferentes aceleraciones de expansión. En la Figura 8 se pueden observar tres gráficas presión adimensional \bar{p} versus *stretch* circunferencial λ para cuatro valores distintos de aceleración de expansión. Estas gráficas se han obtenido para los modelos constitutivos Neo-Hookeano, Ogden de orden 2 y Yeoh, ya que son las que presentan mayores diferencias en sus comportamientos.

Para obtener las gráficas el proceso es similar en los casos de los modelos Neo-Hookeano y Yeoh. Se parte de la ecuación 11 devolviéndola a su forma dependiente de $\ddot{\lambda}$ y $\sigma_{\theta\theta}$. A continuación, se sustituye la tensión circunferencial por la expresión demostrada por Ogden en la ecuación 17, introduciendo en ella las derivadas de la función energía de deformación W correspondiente al modelo constitutivo que se esté utilizando. De esta forma se consigue una presión adimensional $\bar{p} = \bar{p}(\lambda)$ que se grafica empleando el software Matlab, dando diferentes valores al *stretch* λ .

Sin embargo, el método para obtener la función $\bar{p} = \bar{p}(\lambda)$ comentada anteriormente en los modelos de Ogden varía respecto a los otros modelos. Dado que la función energía de deformación W de este método no depende de los invariantes del tensor de Cauchy, no podrán introducirse sus derivadas en la ecuación 17. Siguiendo las demostraciones de [10], las tensiones principales del tensor de Cauchy para un material isótropo incompresible se pueden definir como:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p \quad (18)$$

Aplicando esta ecuación es sencillo obtener la tensión circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$, que depende de las derivadas parciales de la función energía de deformación W respecto a los *stretch* λ , las cuales, en el caso del modelo de Ogden, se obtienen fácilmente. Una vez obtenida esta tensión, se introduce en la ecuación 11 y se consigue $\bar{p} = \bar{p}(\lambda)$.

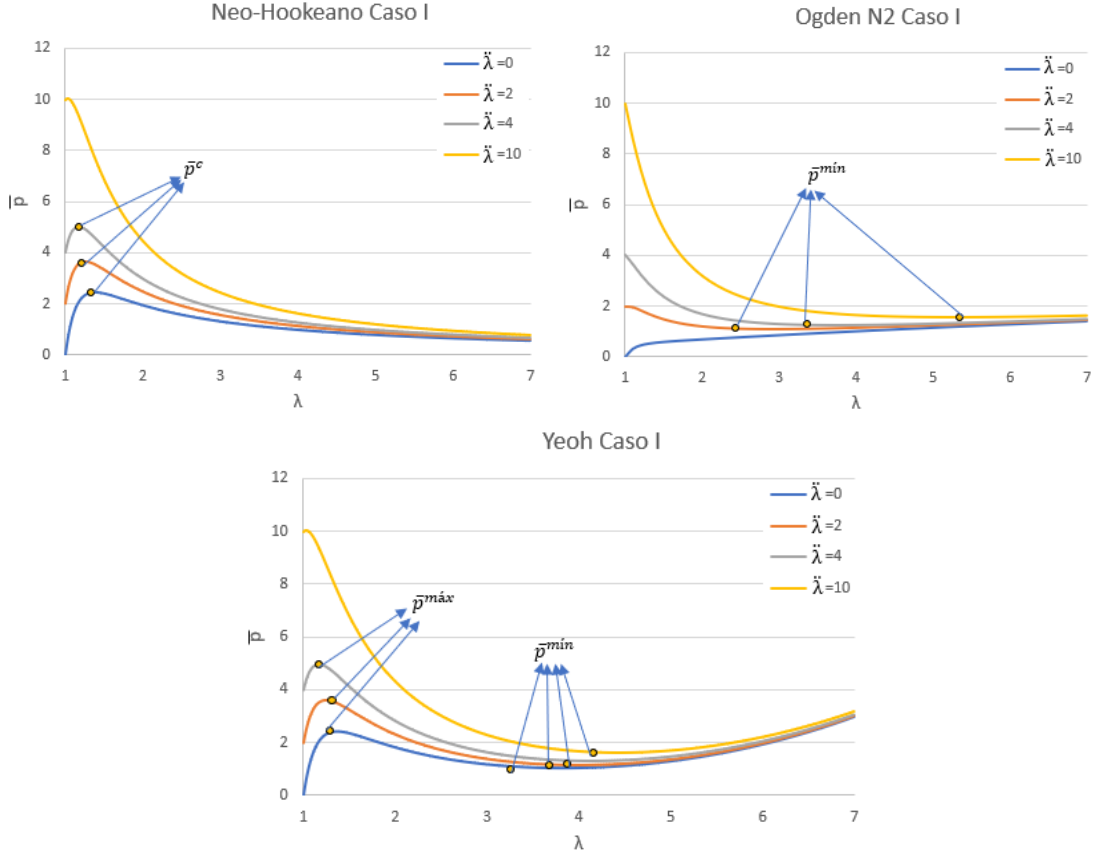


Fig. 8: Presión adimensional \bar{p} versus *stretch* circunferencial λ para distintas aceleraciones de expansión $\ddot{\lambda}$

En la gráfica del modelo Neo-Hookeano se puede observar que existe un máximo en las curvas. A la presión correspondiente a este máximo se le conoce como presión crítica \bar{p}^c y representa la presión a partir de la cual la membrana no podrá soportar el proceso de expansión. La ecuación 11 tendrá dos soluciones para valores de presión $0 < \bar{p} < \bar{p}^c$, una en la parte ascendente y otra en la parte descendente de la curva. Para valores de \bar{p} superiores a \bar{p}^c la ecuación no tiene solución. Los valores de la presión crítica serían 2.4789 para $\ddot{\lambda} = 0$, 3.6411 para $\ddot{\lambda} = 2$, 5.0081 para $\ddot{\lambda} = 4$ y 10.0571 para $\ddot{\lambda} = 10$ aunque este último máximo no puede prácticamente apreciarse en la imagen.

Respecto a las curvas del modelo Ogden de orden 2, se puede apreciar que la curva estática ($\ddot{\lambda} = 0$) no presenta ni máximos ni mínimos; aumentar el *stretch* λ implica

aumentar la presión adimensional \bar{p} . La ecuación 11 se convierte en una biyección, ya que para cada valor de la presión de expansión existe una única solución real. En las otras tres curvas sí se pueden observar unos mínimos cuyas presiones se han denominado \bar{p}^{min} . Estas presiones mínimas tienen un valor de 1.0874 para $\ddot{\lambda} = 2$, 1.2674 para $\ddot{\lambda} = 4$ y 1.5602 para $\ddot{\lambda} = 10$. Estas tres curvas constan por tanto de dos ramas: una descendente que es inestable, ya que se está deformando el material sin incrementar la presión, y otra ascendente que es estable.

Por último, en la gráfica del modelo Yeoh se puede apreciar que todas las curvas presentan un máximo y un mínimo, cuyas presiones se han denominado \bar{p}^{max} y \bar{p}^{min} . Por lo tanto, las curvas constan de tres ramas, las ascendentes de los laterales que son estables, y la descendente entre las dos que es inestable, ya que sin incrementar la presión se está deformando el material. Para presiones situadas en el intervalo $0 < \bar{p} < \bar{p}^{min}$, la ecuación 11 solo tiene una solución real, situada en la primera rama estable. Si $\bar{p}^{min} < \bar{p} < \bar{p}^{max}$, entonces la ecuación tiene tres soluciones reales, una en cada rama. Para presiones $\bar{p} > \bar{p}^{max}$, la ecuación tiene una única solución real en la segunda rama estable. Si la presión adimensional \bar{p} fuera exactamente \bar{p}^{min} o \bar{p}^{max} , entonces la ecuación tendría dos soluciones reales. Los valores de las presiones máximas \bar{p}^{max} serían 2.9739 para $\ddot{\lambda} = 0$, 3.6028 para $\ddot{\lambda} = 2$, 4.9833 para $\ddot{\lambda} = 4$ y 10.0524 para $\ddot{\lambda} = 10$, aunque este último no se aprecia con gran claridad en la imagen. Por otro lado, los valores de las presiones mínimas \bar{p}^{min} son 1.0360 para $\ddot{\lambda} = 0$, 1.1668 para $\ddot{\lambda} = 2$, 1.2882 para $\ddot{\lambda} = 4$ y 1.6148 para $\ddot{\lambda} = 10$.

4.1.1.2. Influencia de la función energía de deformación

En esta sección se va a analizar el papel que juega la función energía de deformación W que se escoja, es decir, el modelo constitutivo, en el proceso de expansión de la membrana. En la figura 9 se pueden observar cuatro gráficas presión adimensional versus *stretch* circunferencial (\bar{p} vs λ), que permiten comparar los seis modelos constitutivos propuestos en la sección 2.2, para dos aceleraciones de expansión constantes $\ddot{\lambda}$ de valores 1 y 15.

Es importante señalar que la gráfica del modelo Mooney-Rivlin se obtiene siguiendo el mismo proceso de cálculo que el de los modelos Neo-Hookeano y Yeoh descrito en la sección 4.1.1 anterior.

A primera vista ya se puede observar que, independientemente de la aceleración de expansión impuesta, el comportamiento de la membrana depende profundamente de la función energía de deformación escogida, ya que las curvas son muy diferentes entre sí. Por lo tanto, la estabilidad o inestabilidad de la membrana esférica dependerá del modelo elegido.

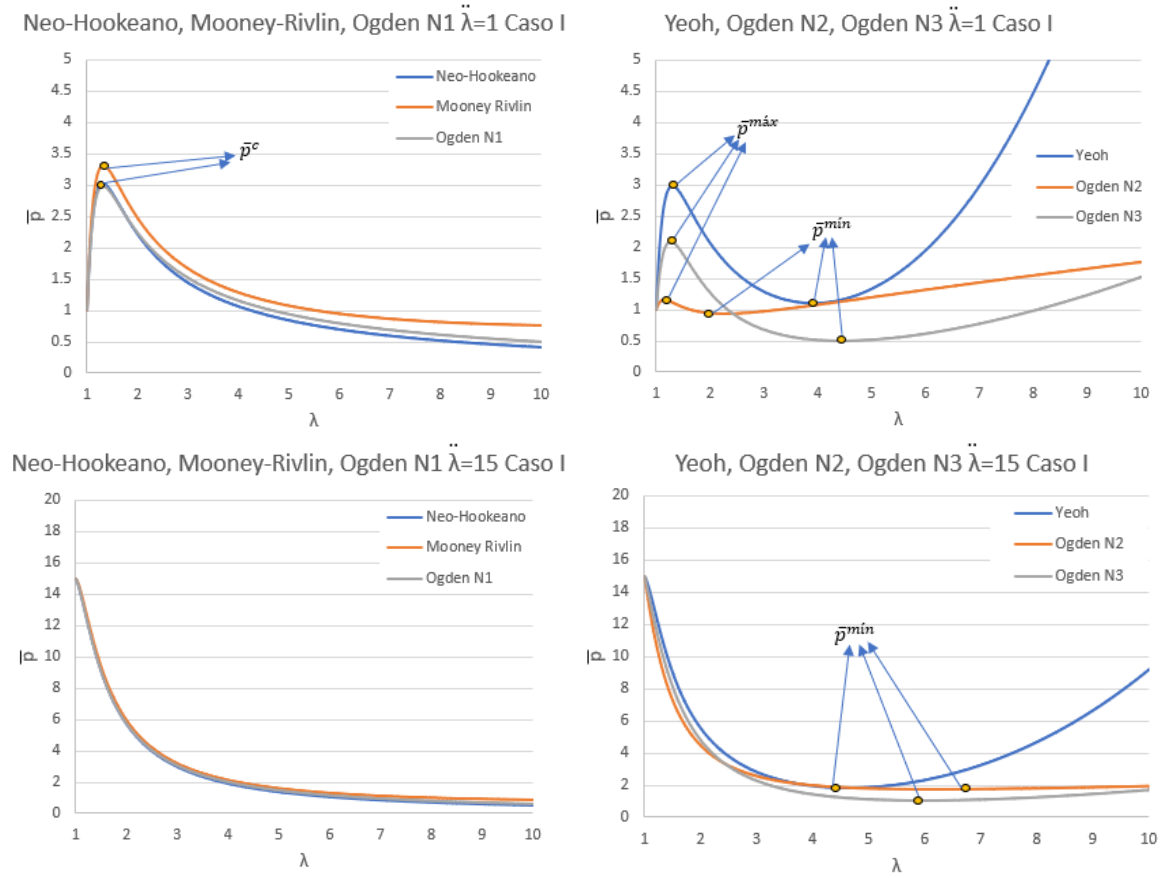


Fig. 9: Presión adimensional \bar{p} versus *stretch* circunferencial λ para los seis modelos constitutivos ($\ddot{\lambda} = 1$ y $\ddot{\lambda} = 15$)

En el caso de las gráficas de $\ddot{\lambda} = 1$, se puede apreciar que las curvas de los modelos Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin y Ogden de orden 1 presentan un máximo, cuya presión se ha denominado presión crítica \bar{p}^c . Esto implica que las curvas tendrán, por tanto, una rama estable ascendente, y otra inestable descendente. Los valores de estas presiones críticas serán 3.0320 para el Neo-Hookeano, 3.3028 para Mooney-Rivlin y 2.9941 para Ogden de orden 1. Respecto a las curvas de los modelos Yeoh, y Ogden de órdenes 2 y 3, se puede observar que las tres presentan un máximo y un mínimo, cuyas presiones se han designado como \bar{p}^{max} y \bar{p}^{min} respectivamente. Esto implica que las curvas tienen tres zonas: las dos ascendentes de los laterales que son estables, y la descendente central que es inestable, ya que se deforma la membrana sin incrementar la presión. Los valores de las presiones máximas son 2.9838 para Yeoh, 1.1616 para Ogden de orden 2 y 2.0919 para Ogden de orden 3. Por su parte, las presiones mínimas valen 1.1028 para Yeoh, 0.9386 para Ogden de orden 2 y 0.4991 para Ogden de orden 3.

Por otro lado, las gráficas de $\ddot{\lambda} = 15$, muestran unas curvas de expansión inestables siempre descendientes para los modelos Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin y Ogden de orden 1, mientras que las curvas de los otros tres modelos muestran un punto mínimo (\bar{p}^{min}), lo que implica una rama inestable descendente, seguida de otra estable ascendente. Estas presiones mínimas toman los valores de 1.8579 para el modelo Yeoh, 1.7124 para Ogden de orden 2 y 1.0030 para Ogden de orden 3.

La conclusión es que, partiendo de los mismos datos experimentales, los resultados son drásticamente diferentes en función del modelo constitutivo que se escoja. Esto es realmente importante ya que afecta de forma determinante sobre las condiciones de estabilidad e inestabilidad de la membrana en el proceso de expansión, como se ha podido observar con claridad en las imágenes.

4.1.2. Caso II: presión constante instantánea

4.1.2.1. Influencia de la presión de expansión

Para comenzar el análisis del segundo caso de expansión, se van a discutir primero las gráficas que se pueden observar en la Figura 10. En ella, se encuentran tres gráficas presión adimensional \bar{p} versus *stretch* circunferencial λ para los modelos Neo-Hookeano, Ogden de orden 2 y Yeoh. En cada gráfica hay dos curvas, una para el caso estático en el que tanto la velocidad $\dot{\lambda}$ como la aceleración $\ddot{\lambda}$ de expansión son nulas, y otra para el caso dinámico, en el que la velocidad de expansión también es nula, pero la aceleración no lo es.

Para obtener estas gráficas, en el caso estático el cálculo es igual que en los anteriores gráficos, ya que es el caso I de expansión con $\ddot{\lambda} = 0$. Sin embargo, para el caso dinámico habrá que aplicar las expresiones del caso II, ya que hay aceleración variable. Partiendo de la ecuación 14, se puede anular en este caso el término de la velocidad de expansión $\dot{\lambda}$. A partir de ahí, simplemente hay que integrar, sustituyendo la tensión circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$ por la ecuación del modelo constitutivo correspondiente. De esta forma, se obtendrá la función $\bar{p} = \bar{p}(\lambda)$.

En la gráfica del modelo Neo-Hookeano se puede observar que ambas curvas alcanzan un máximo. Antes de ese punto, la curva estática está por encima de la dinámica, pero a partir de \bar{p}_d^c se intercambian las curvas. Los valores de estos máximos son $\bar{p}_s^c = 2.4789$ y $\bar{p}_d^c = 2.2243$. En el caso de la gráfica del modelo Ogden de orden 2, la curva dinámica va siempre por debajo de la estática, independientemente del valor de λ . Ambas curvas son siempre ascendentes, no hay ni máximos ni mínimos. Por último, en la gráfica del modelo Yeoh, la curva estática va por encima de la dinámica hasta un máximo local (\bar{p}_d^{max}). Después, la curva dinámica va por encima, hasta el punto mínimo

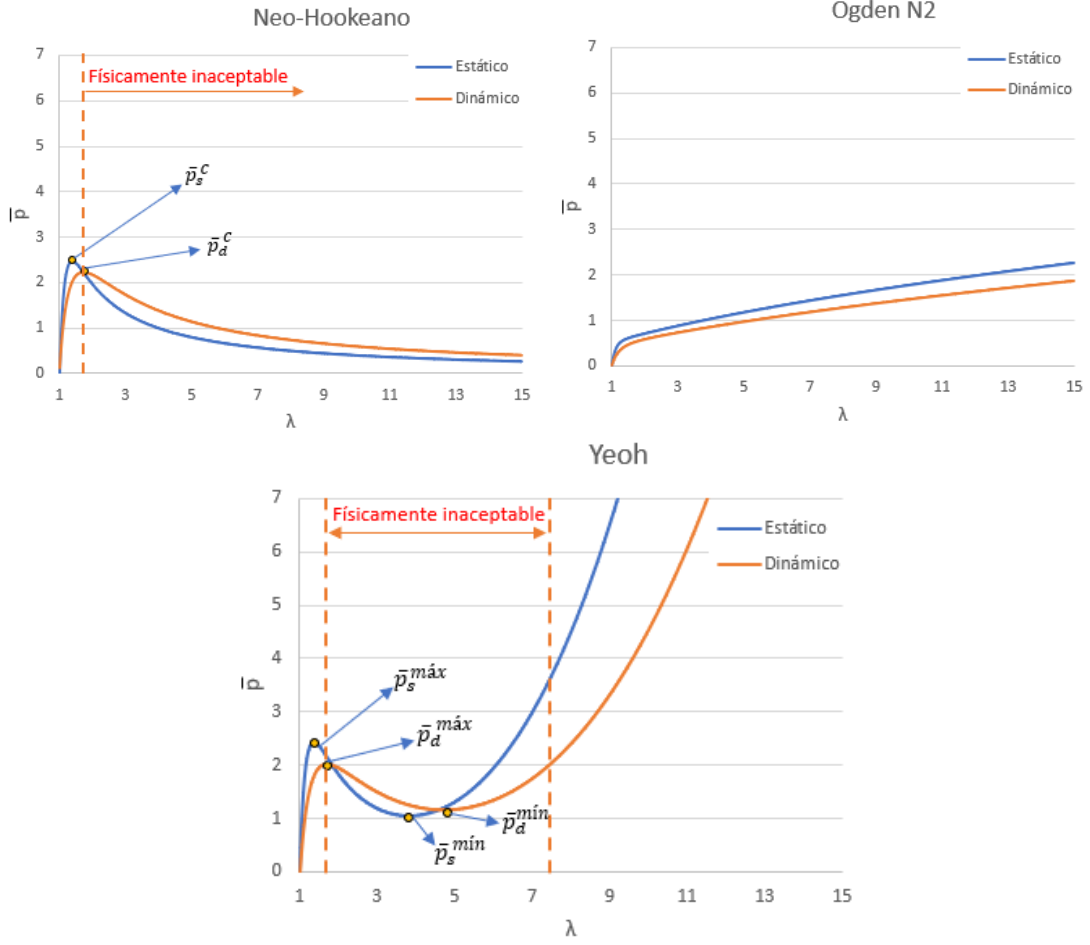


Fig. 10: Presión adimensional \bar{p} versus *stretch* circunferencial λ para los casos estático ($\dot{\lambda} = 0$ y $\ddot{\lambda} = 0$) y dinámico ($\dot{\lambda} = 0$ y $\ddot{\lambda} \neq 0$)

\bar{p}_d^{min} , y, a partir de ahí, la situación entre las dos curvas se revierte definitivamente. Las puntos máximos toman los valores de $\bar{p}_s^{max}=2.4180$ y $\bar{p}_d^{max}=2.0043$, mientras que los mínimos valen $\bar{p}_s^{min}=1.0360$ y $\bar{p}_d^{min}=1.1456$. Es importante señalar las zonas "físicamente inaceptables", que son aquellas donde la membrana se estaría deformando sometida a una presión inferior a la máxima dinámica \bar{p}_d^{max} .

A continuación, en la Figura 11, se pueden observar los diagramas de fase de los modelos Neo-Hookeano, Ogden de orden 2 y Yeoh, que representan la velocidad de expansión de la membrana esférica $\dot{\lambda}$ frente al *stretch* circunferencial λ . Es decir, estas gráficas muestran la deformación de la membrana y la velocidad a la que se deforma.

Para obtener estas gráficas hay que partir de nuevo de la ecuación 14 perteneciente al caso II. En este caso, no se puede anular el término de la velocidad de expansión $\dot{\lambda}$, así que el resultado dependerá de la presión adimensional \bar{p} . Por lo tanto, se hace necesario dar valores a la presión y así se obtiene una función $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(\lambda)$.

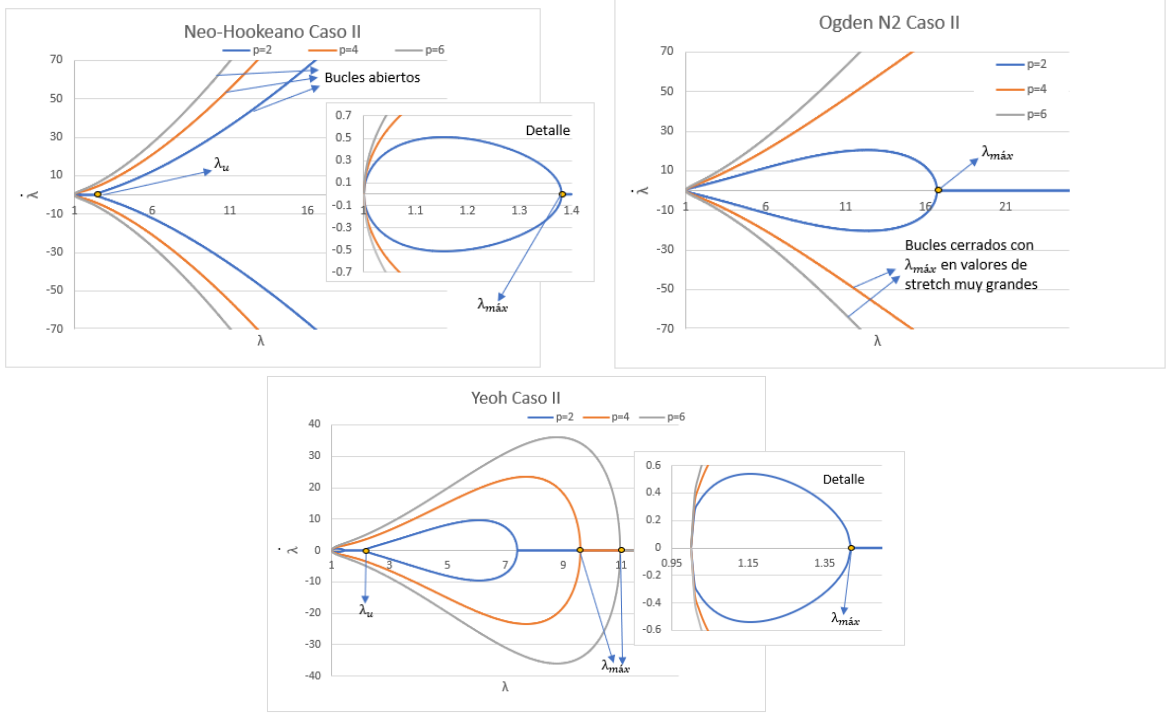


Fig. 11: Diagramas de fase, $\dot{\lambda}$ versus λ , para tres valores de presión adimensional \bar{p}

Respecto a la gráfica del modelo Neo-Hookeano, en la imagen del detalle se puede apreciar como la curva de la presión que toma valor 2 realiza un bucle cerrado en valores de *stretch* inferiores a 1.4. Esto es importante, ya que es la primera demostración real del comportamiento oscilatorio de la esfera en su proceso de expansión. Las condiciones iniciales son $(1, 0)$, es decir, un *stretch* $\lambda = 1$ que indica que no hay deformación inicial, y una velocidad de expansión $\dot{\lambda} = 0$ que indica el reposo del que se parte. A continuación, se inicia la deformación de la esfera, con una velocidad que aumenta hasta llegar a un máximo para después disminuir. Cuando la membrana llega a la deformación máxima (λ_{max}), realiza el camino inverso hasta recuperar su estado inicial. Este proceso se repetirá periódicamente, ya que no se produce disipación de energía. El valor de este *stretch* λ_{max} es de 1.38. Para valores de *stretch* superiores a λ_u , esta curva se divide en dos ramas que se separan la una de la otra, lo cual representa un comportamiento inestable de la membrana. Lo mismo ocurre con las curvas correspondientes a $\bar{p} = 4$ y $\bar{p} = 6$, ya que estas presiones están por encima de la presión \bar{p}_d^c que se podía observar en la Figura 10, y la membrana no puede soportarlas.

Por otro lado, la gráfica del modelo Ogden de orden 2 muestra bucles cerrados para cualquier valor de \bar{p} . Esto pone de manifiesto que la membrana tendrá un comportamiento oscilatorio periódico independientemente de la presión a la que esté sometida. Esto tiene sentido ya que, como se pudo observar en la Figura 10, en el caso del modelo

de Ogden de orden 2 no existía ninguna zona “físicamente inaceptable”, por lo tanto la membrana puede soportar cualquier presión. Además, se puede apreciar que cuanto más aumenta la presión, mayores son también las velocidades de expansión. Por lo tanto, se puede concluir que cuanto mayor sea la presión de expansión, la membrana se deformará más y más rápidamente. El valor del *stretch* λ_{max} para la presión $\bar{p} = 2$ es de 16.706.

Por último, en la gráfica del modelo Yeoh se puede observar una respuesta periódica para las tres presiones. La curva correspondiente a $\bar{p} = 2$ está dividida en dos partes. La primera, visible en el detalle, muestra la respuesta oscilatoria periódica de la membrana que se deforma hasta λ_{max} . La segunda zona, al igual que ocurría en el modelo Neo-Hookeano, muestra un comportamiento inestable que pone de manifiesto que una membrana inicialmente en equilibrio y sin deformar no puede alcanzar valores de *stretch* superiores a λ_u para presiones inferiores a \bar{p}_d^{max} . Las curvas correspondientes a $\bar{p} = 4$ y $\bar{p} = 6$ muestran respuestas periódicas estables. Estas presiones son superiores a \bar{p}_d^{max} y la gráfica se enmarcará en la segunda zona estable que se podía observar en la Figura 10. Hay que señalar el importante incremento que se produce en el valor de λ_{max} cuando la presión de expansión supera el valor de \bar{p}_d^{max} . Los valores de los *stretch* λ_{max} son 1.65 para $\bar{p} = 2$, 9.611 para $\bar{p} = 4$ y 10.976 para $\bar{p} = 6$.

Para finalizar este análisis, tal y como se comentó al final de la sección 2.1.2, es posible calcular el periodo adimensional de las oscilaciones de la membrana esférica. A partir de la ecuación 16, es sencillo obtener las gráficas correspondientes a los modelos Neo-Hookeano, Ogden de orden 2 y Yeoh que se pueden observar en la Figura 12

En esta gráfica se pueden observar tres curvas periodo T versus presión adimensional \bar{p} . En la gráfica del modelo de Ogden de orden 2 se puede apreciar como el periodo aumenta con la presión hasta un máximo denominado T_{max} para disminuir a continuación. El valor de este periodo máximo es de 7.2121. Por otro lado, en la gráfica del modelo Neo-Hookeano se aprecia cómo el periodo aumenta con la presión hasta que esta alcanza el valor de \bar{p}_d^c de 2.2243, donde el periodo tiende a infinito y la respuesta de la membrana deja de ser oscilatoria estable. Por último, en el modelo Yeoh, el periodo comienza aumentando hasta que la presión alcanza el valor de $\bar{p}_d^{max} = 2,0043$, donde $T \rightarrow \infty$ y la respuesta de la membrana se vuelve inestable. Al superar ese valor de presión, el comportamiento de la membrana vuelve a ser oscilatorio, con un periodo que disminuye con la presión.

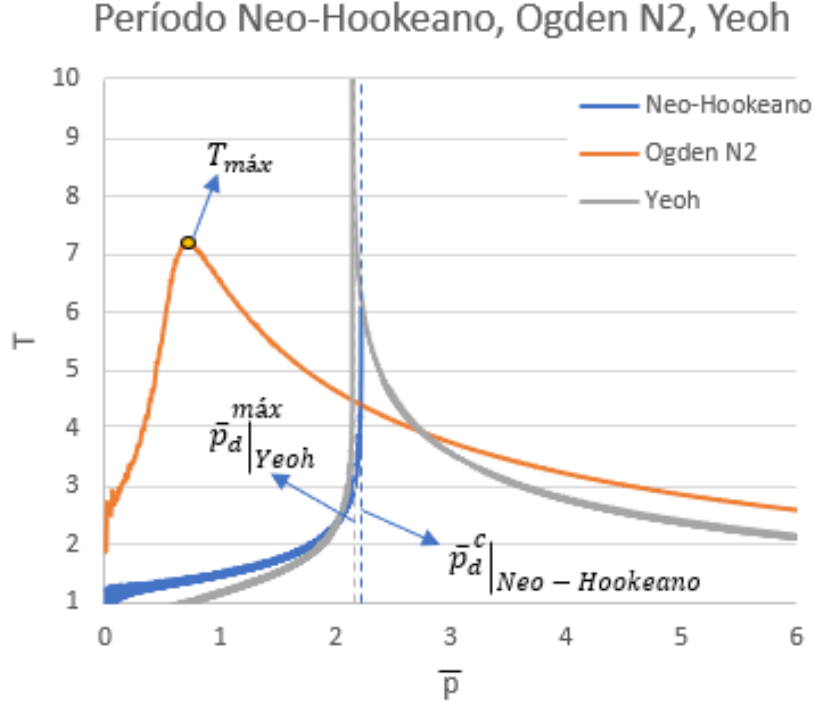


Fig. 12: Periodo de oscilación T versus presión adimensional \bar{p}

4.1.2.2. Influencia de la función energía de deformación

Para analizar el papel que juega la función energía de deformación W en la respuesta de la membrana se va a obtener la gráfica de los seis modelos constitutivos expuestos en la sección 2.2 para el caso dinámico en el que la velocidad de expansión $\dot{\lambda}$ es nula, pero la aceleración $\ddot{\lambda}$ no lo es. El resultado se puede observar en la Figura 13.

Para obtener estas curvas de expansión se procede de igual forma que en la sección 4.1.2, ya que se buscan las mismas curvas del caso dinámico, pero para los seis modelos.

En el caso de los modelos Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin y Ogden de orden 1 el comportamiento de la curva es similar. Comienza de forma estable, aumentando el *stretch* con la presión, hasta que esta alcanza un máximo denominado \bar{p}_d^c . A partir de este punto, la membrana se deformaría con una presión que disminuye, lo cual pone de manifiesto un comportamiento inestable que se enmarca dentro de la zona “físicamente inaceptable”. Los valores de estas presiones máximas \bar{p}_d^c son 2.2243 para el modelo Neo-Hookeano, 2.4771 para el modelo Mooney-Rivlin, y 2.2032 para el de Ogden de orden 1.

Por otro lado, las curvas de los modelos Yeoh y Ogden de orden 3 también muestran una tendencia similar. Se inician con un comportamiento estable en el que la

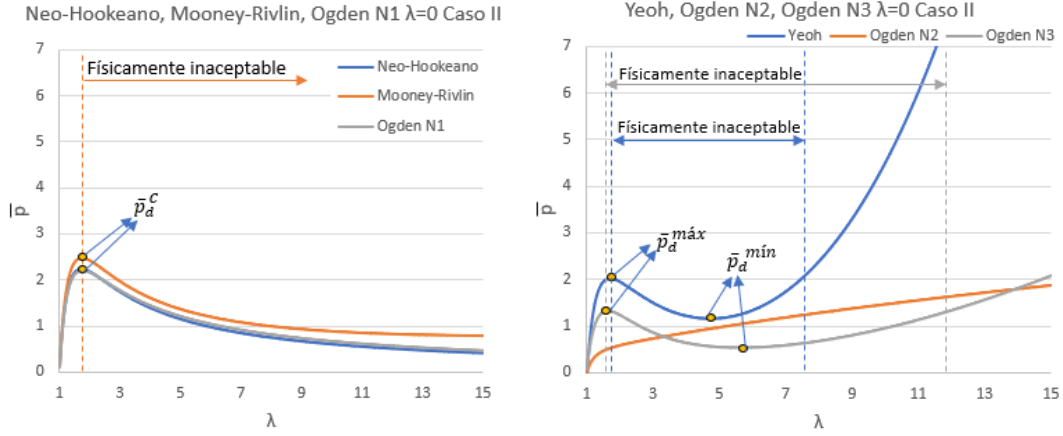


Fig. 13: Presión adimensional \bar{p} versus *stretch* circunferencial λ para el caso dinámico ($\dot{\lambda} = 0$ y $\ddot{\lambda} \neq 0$)

deformación se incrementa con la presión, hasta llegar a \bar{p}_d^{max} . A partir de aquí, el comportamiento es inestable, pues la deformación continúa aumentando, aunque la presión disminuye. Una vez se alcanza el punto mínimo, denominado como \bar{p}_d^{min} , la presión vuelve a aumentar junto con el *stretch* circunferencial, por lo que el comportamiento se vuelve estable. Sin embargo, como ya se indicó anteriormente, no es físicamente posible el comportamiento oscilatorio de una membrana inicialmente en equilibrio y sin deformar para presiones inferiores a \bar{p}_d^{max} . Por este motivo, toda la zona que abarca presiones $\bar{p} < \bar{p}_d^{max}$, a partir del máximo relativo de la curva, se considera “físicamente inaceptable”. Los valores de estos puntos máximos y mínimos son: $\bar{p}_d^{max}=2.0043$ y $\bar{p}_d^{min}=1.1456$ para el modelo Yeoh, $\bar{p}_d^{max}=1.3272$ y $\bar{p}_d^{min}=0.5364$ para el modelo de Ogden de orden 3.

Por último, el modelo de Ogden de orden 2 muestra una curva siempre ascendente, por lo que el comportamiento de la membrana será estable independientemente de la presión que se le aplique.

De este apartado se extrae una conclusión que extiende la información obtenida en la sección 4.1.1: partiendo de los mismos datos, los resultados son completamente diferentes dependiendo del modelo constitutivo que se decida escoger.

Para continuar con el análisis se van a exponer en la Figura 14 los diagramas de fase, es decir, las gráficas velocidad de expansión $\dot{\lambda}$ versus *stretch* circunferencial λ de los seis modelos constitutivos para una misma presión adimensional $\bar{p} = 2$. Las gráficas se obtienen de la misma forma que en la sección 4.1.2, es decir, desarrollando la ecuación 14.

El comportamiento de la membrana utilizando los modelos Neo-Hookeano, Mooney Rivlin y Ogden de orden 1 es similar. Como se puede observar, las curvas están

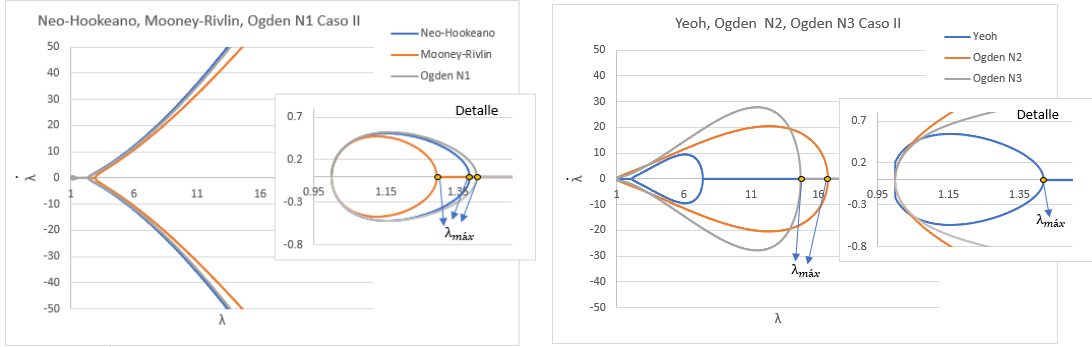


Fig. 14: Diagramas de fase, $\dot{\lambda}$ versus λ , para los seis modelos constitutivos ($\bar{p} = 2$)

divididas en dos partes. La presión que se aplica en este caso está por debajo de la presión \bar{p}_d^c que se obtuvo en la Figura 13 anterior, por lo tanto la membrana debe oscilar. Pero esto solo ocurre en el bucle inicial que se puede ver con claridad en la imagen del detalle. Los valores de *stretch* de la parte derecha de las curvas no son físicamente aceptables para una membrana inicialmente en equilibrio y sin deformar. Por lo tanto, la membrana oscila entre los valores de *stretch* 1 y λ_{max} . Los valores de estos *stretch* λ_{max} son: 1.38 para el modelo Neo-Hookeano, 1.29 para el de Mooney-Rivlin y 1.4 para el de Ogden de orden 1.

El caso del modelo de Yeoh también refleja una curva dividida en dos partes, dos bucles cerrados en este caso. La presión aplicada de valor 2 es también inferior al valor de \bar{p}_d^{max} de la Figura 13, por lo tanto, la membrana oscila. Esta oscilación se muestra en la zona izquierda de la gráfica, es decir, entre los valores de *stretch* 1 y λ_{max} . La zona derecha abarca unos valores de *stretch* no asumibles por una membrana inicialmente en equilibrio y sin deformar. El valor de λ_{max} para este modelo es de 1.6520.

El modelo Ogden de orden 2 no presentaba ninguna zona físicamente inaceptable en la Figura 13, por lo tanto, la membrana debe presentar un comportamiento oscilatorio ante cualquier presión. El caso de $\bar{p} = 2$ no es una excepción y la gráfica muestra un bucle cerrado entre $\lambda = 1$ y λ_{max} . El valor de este *stretch* λ_{max} es de 16.706.

Por último, el caso del modelo de Ogden de orden 3 muestra de nuevo un bucle cerrado que refleja un comportamiento oscilatorio de la membrana. La presión aplicada de valor 2 es superior a la presión \bar{p}_d^{max} de la Figura 13. Sin embargo, el comportamiento es oscilatorio estable, por lo tanto, este caso se ubica dentro de la segunda zona "físicamente aceptable" que se podía observar en la imagen anterior. El valor del *stretch* máximo λ_{max} es de 14.673.

Por último, para terminar de remarcar la idea de la gran influencia que ejerce en el comportamiento de la membrana el modelo constitutivo que se elija, en la Figura 15 se pueden observar las gráficas que muestran el periodo de oscilación T de la membrana

en función de la presión de expansión que se le aplica.

En la imagen de la izquierda se puede apreciar que los modelos Neo-Hookeano, Mooney Rivlin y Ogden de orden 1 presentan curvas de comportamientos similares. El periodo comienza aumentando con la presión adimensional hasta que esta alcanza el valor \bar{p}_d^c que se pudo observar en la Figura 13. En este punto la curva asciende asintóticamente hacia arriba, de forma que $T \rightarrow \infty$. Esto significa que la membrana no puede soportar presiones superiores a esas presiones críticas, y que por lo tanto oscilará solo para $\bar{p} < \bar{p}_d^c$. Es importante señalar que en todo momento el periodo calculado según el modelo Mooney-Rivlin es más pequeño que en los modelos Neo-Hookeano y Ogden de orden 1.

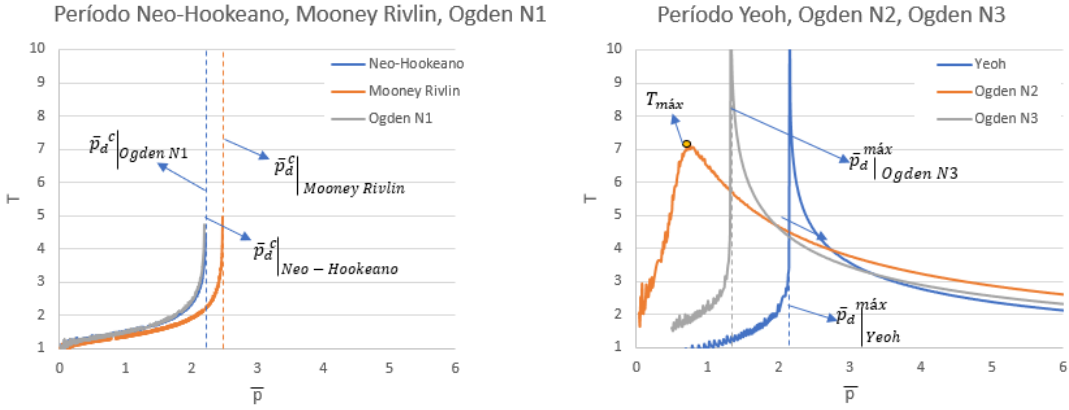


Fig. 15: Período de oscilación T versus presión adimensional para los seis modelos constitutivos

Por otro lado, también las curvas de los modelos Yeoh y Ogden de orden 3 tiene una forma parecida. En estos casos el periodo comienza aumentando con la presión (con un comportamiento algo fluctuante al inicio). Cuando la presión alcanza el valor \bar{p}_d^{max} que se calculó con las gráficas de la Figura 13 el periodo tiende a infinito, lo que manifiesta un comportamiento inestable de la membrana. Sin embargo, a partir de este valor de presión, el movimiento oscilatorio y estable regresa, con un periodo que va disminuyendo según se aumenta la presión. Por lo tanto, para estos dos modelos, la membrana esférica oscila ante cualquier presión salvo $\bar{p} = \bar{p}_d^{max}$.

Por último, el modelo de Ogden de orden 2 muestra una curva continua, lo que señala que el comportamiento de la membrana será siempre estable y oscilatorio. Esto concuerda con la Figura 13 en la que la gráfica de este modelo no mostraba ninguna zona “físicamente inaceptable”. Como se puede apreciar, el periodo comienza aumentando con la presión hasta un valor máximo $T_{max} = 7.2121$. A partir de este punto, el periodo comienza a disminuir según aumenta la presión.

4.2. Resultados del modelo numérico

En esta sección se van a exponer los resultados que se han obtenido a través de las simulaciones realizadas con el software Abaqus. Los detalles para la definición del modelo han sido previamente explicados en la sección 3. Para la simulación de los modelos Neo-Hookeano, Mooney-Rivlin, Yeoh y Ogden de orden 1 se ha sometido a la esfera a una presión de 727 Pa ($\bar{p} = 2$) para poder compararlos fácilmente con las gráficas previamente obtenidas, pero se han tenido que emplear presiones algo inferiores en los modelos de Ogden de órdenes 2 y 3, ya que para ese valor de presión las deformaciones son demasiado grandes para ser asumidas por el programa Abaqus.

Una vez el programa finaliza los cálculos se puede apreciar claramente cómo la esfera realiza movimientos periódicos de expansión, tal y como corresponde a los resultados analíticos.

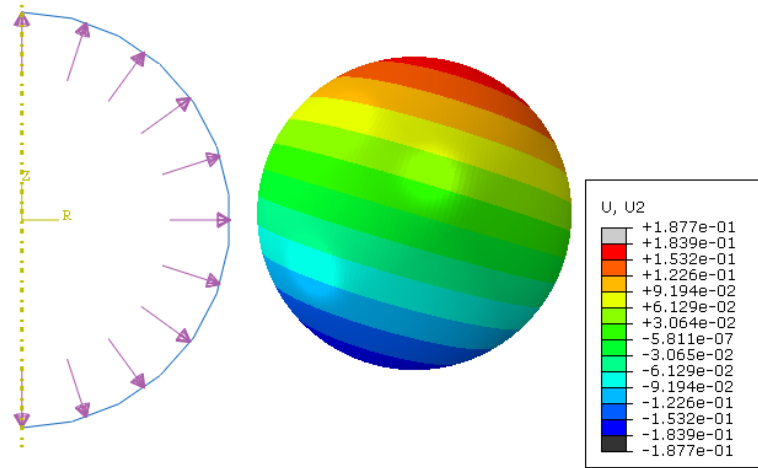


Fig. 16: Visualización de resultados en Abaqus

Para poder comparar los resultados numéricos con los analíticos, la mejor opción es obtener los diagramas de fase (λ vs $\dot{\lambda}$) según los datos de Abaqus. Para ello, Abaqus permite obtener gráficos desplazamiento vs tiempo, proporcionando además los datos exactos de cada punto de las gráficas. Por ejemplo, seleccionando la variable de desplazamiento vertical (U2), en el nodo situado en la posición más alta de la esfera, se obtiene una gráfica del estilo de la Figura 17.

Se puede apreciar que, a medida que avanza el tiempo, las oscilaciones de la gráfica disminuyen levemente su amplitud. Esto ocurre porque para Abaqus es imposible considerar incompresibilidad total en los materiales. A pesar de haber configurado las constantes D ya mencionadas en la sección 3 con valor 0, el programa realmente les

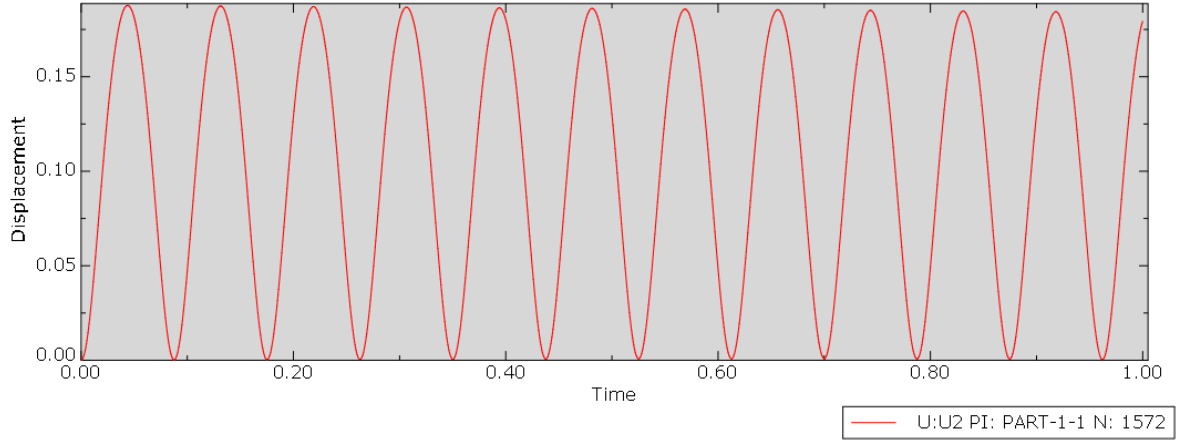


Fig. 17: Gráfica desplazamiento vertical vs tiempo en Abaqus

asigna el mínimo valor que puede considerar, para poder llevar a cabo los cálculos pertinentes. De esta forma siempre habrá cierta viscosidad artificial en los materiales, así como propagación de ondas a través de la superficie de la esfera. Esto provoca pérdidas de energía en el proceso de expansión, haciendo que la amplitud de las oscilaciones descienda con el tiempo.

Una vez obtenidos los datos de la gráfica, solo es necesario adimensionalizar el tiempo, empleando las fórmulas de la sección 2, y calcular en cada punto el *stretch* y la velocidad de expansión por su propia definición.

En la Figura 18 se muestran estos diagramas de fase obtenidos con las simulaciones numéricas, comparándolos con los correspondientes a los resultados analíticos.

4.3. Comparación de resultados

La mejor forma de comparar los resultados analíticos y los numéricos es empleando los diagramas de fase. Uniendo en una misma gráfica los datos de los resultados analíticos, procedentes de Matlab, y los de los resultados numéricos, procedentes de Abaqus, es fácil comprobar su exactitud. Dado que todos los diagramas procedentes de Abaqus tienen una forma muy similar, se van a incluir en este documento los correspondientes a los modelos Neo-Hookeano, Yeoh y Ogden N1, a modo de muestra. Los gráficos de los resultados analíticos son lógicamente los mismos que aparecen a lo largo de la sección 4.1, pero únicamente los bucles iniciales. En algunos de los diagramas de los cálculos analíticos, aparecen ramas que se separan y que representan comportamientos inestables de la membrana. Como son valores de deformaciones físicamente imposibles, en Abaqus no existen, por eso en las gráficas de la Figura 18 solo se muestran las zonas de los diagramas correspondientes al comportamiento oscilatorio de la membrana.

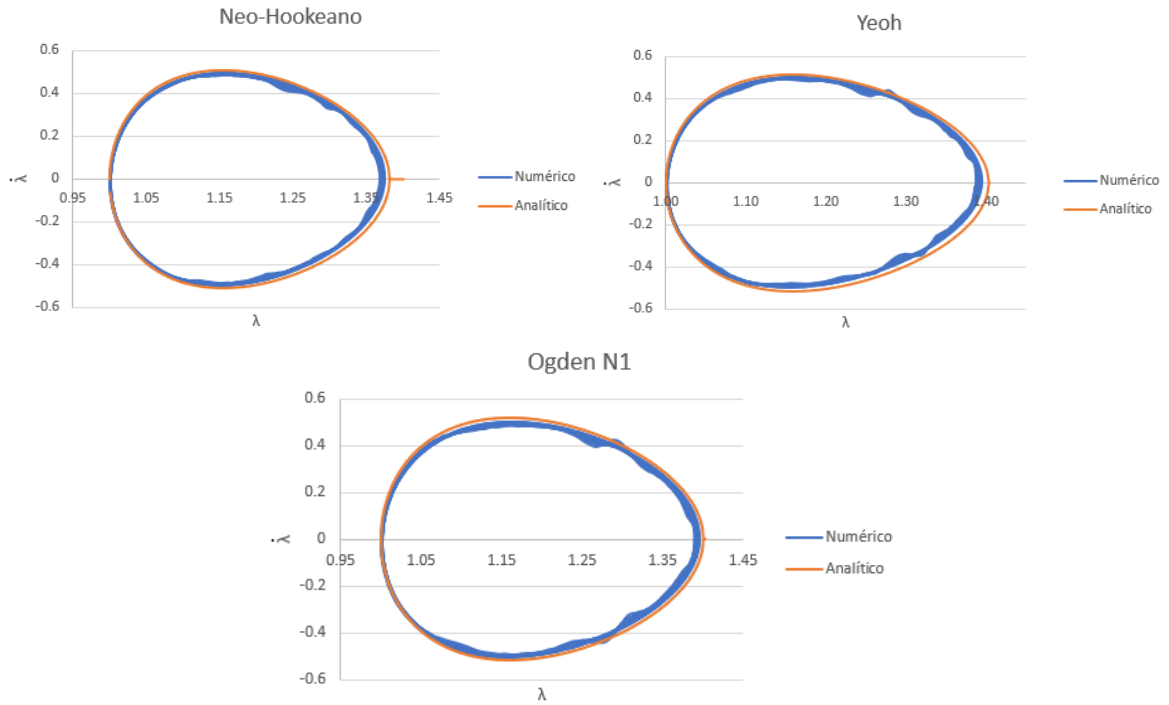


Fig. 18: Comparación de los diagramas de fase

Es evidente a simple vista que la similitud entre las curvas analíticas y las numéricas es muy elevada. En todos los casos, el diagrama analítico alcanza valores de *stretch* circunferencial máximo ligeramente superiores a los del diagrama numérico, sin llegar a existir una diferencia superior al 1 % en ninguno de los modelos. Es importante señalar que las irregularidades que se observan en las gráficas correspondientes a los resultados numéricos se deben a la viscosidad artificial que Abaqus necesita introducir en los materiales, como se explicó a raíz de la Figura 17. A pesar de esto, se puede concluir que la correspondencia entre resultados analíticos y numéricos es muy elevada.

4.4. Validez de la hipótesis de pared delgada

Como ya se ha comentado anteriormente, empleando el software Abaqus es posible comprobar la validez de la hipótesis de pared delgada. En los cálculos analíticos siempre se ha considerada esta hipótesis, y en los numéricos también ha sido así, al definir la esfera como elemento tipo *Wire*, es decir, unidimensional, con un espesor muy inferior al radio. Para realizar esta comprobación, la esfera ha de ser definida como elemento tipo *Solid* (tridimensional), lo cual permitirá ir variando el espesor de la membrana. En la Figura 19, se muestran los diagramas de fase que se han obtenido con las simulaciones numéricas, variando el espesor de la membrana, utilizando los modelos Neo-Hookeano y Ogden de orden 1.

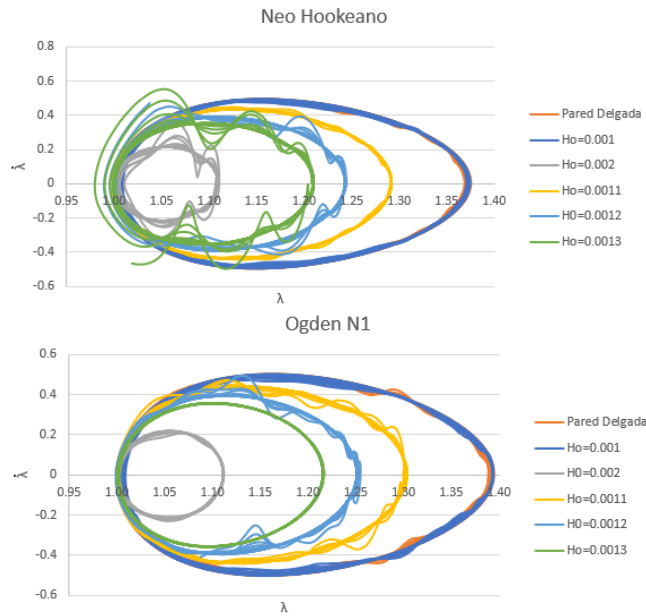


Fig. 19: Diagramas de fase según el espesor de la membrana $H_0(m)$

A simple vista se puede apreciar que la deformación de la membrana va siendo menor a medida que aumenta el espesor, siempre manteniéndose el comportamiento oscilatorio. Son muy visibles en estas gráficas las fluctuaciones que ya aparecían en los diagramas de la Figura 18. De nuevo se deben a la compresibilidad que Abaqus necesita incorporar a los cálculos, lo que hace que las oscilaciones de la esfera no puedan ser exactamente de la misma amplitud a lo largo del tiempo.

NEO-HOOKEANO		OGDEN N1	
ESPESOR(m)	λ_{max}	ESPESOR(m)	λ_{max}
Pared delgada	1.38	Pared delgada	1.4
Ho=0.001	1.374518	Ho=0.001	1.394168
Ho=0.0011	1.292008	Ho=0.0011	1.30376
Ho=0.0012	1.24425	Ho=0.0012	1.254834
Ho=0.0013	1.210156	Ho=0.0013	1.216478
Ho=0.002	1.110543	Ho=0.002	1.1118518

Tabla 3: Valores de *stretch* máximos según el espesor de la membrana

El valor de los *stretch* máximos a los que llega la membrana, con un espesor $H_o = 0,001m$ es de 1.374518 en el método Neo-Hookeano, y de 1.394168 en el de Ogden de orden 1. Si se emplea como criterio de validez de la hipótesis de pared delgada una diferencia en el máximo *stretch* no superior al 10% se puede concluir que a partir del espesor de 0.0012 metros, la hipótesis de pared delgada deja de ser válida en ambos modelos constitutivos. Como conclusión, se puede afirmar, que según este criterio, cuando el valor del espesor de la membrana supera en un 20% el supuesto para considerar pared delgada, esta hipótesis deja de ser aplicable en este problema.

5. Conclusiones

En esta sección se van a presentar, de forma resumida, las conclusiones que pueden ser extraídas de todos los apartados y cálculos anteriores.

- El modelo constitutivo que se escoja para configurar el material ejerce una enorme influencia en su comportamiento. La función energía de deformación W determina incluso la estabilidad de la membrana en su proceso de expansión.
- La presión a la que la membrana es sometida determina su comportamiento. Además de que, evidentemente, mayores presiones provocan deformaciones más grandes, pueden aparecer incluso las zonas “físicamente inaceptables” en función de la presión que se escoja.
- No es posible que los resultados analíticos y numéricos coincidan a la perfección. Aunque las diferencias entre ambos métodos son bastantes limitadas, las pérdidas de energía que se producen en las simulaciones, debido a la compresibilidad del material, hacen que las oscilaciones no mantengan siempre la misma amplitud. Como consecuencia, los resultados no coincidirán con exactitud.
- Un espesor de membrana superior al inicial en aproximadamente un 20 % de su valor, invalida la hipótesis de pared delgada. Esto se ha demostrado gracias a las simulaciones de elementos finitos, empleando como criterio una diferencia entre los *stretch* máximos alcanzados por la membrana del 10 %.

Por último, la conclusión final de un estudio de este tipo tiene que ser la respuesta al objetivo principal del mismo. Después de todos los cálculos realizados y los resultados obtenidos, se puede afirmar que la respuesta de una membrana esférica de material hiperelástico cuando es sometida a una presión interna de valor constante es un comportamiento oscilatorio. A través de los cálculos analíticos se han obtenido los diagramas de fase de todos los modelos constitutivos, y estos muestran una esfera que empieza en reposo, para después comenzar a deformarse hasta un máximo, y que seguidamente regresa a sus condiciones iniciales. Además, a través de las simulaciones se visualizan las conclusiones de los resultados analíticos, y gracias al programa Abaqus se puede ver con claridad una membrana esférica que se expande y contrae cíclicamente a lo largo del tiempo. Por lo tanto, se ha logrado cumplir el objetivo del trabajo, demostrándose el comportamiento oscilatorio de la membrana.

6. Trabajos futuros

Una de las principales motivaciones para la elección de la temática de este trabajo es la gran amplitud de posibilidades de estudio que ofrece. La membrana esférica sometida a una presión interna es solo un caso de entre todas las posibilidades que se enmarcan en este campo. Con ligeras modificaciones en diferentes aspectos de este proyecto, pueden surgir distintos estudios que amplían el alcance de este.

Una forma realmente interesante de continuar con este trabajo sería eliminar la hipótesis de pared delgada. De esta forma, se diseñaría una membrana con un espesor mayor y se podrán considerar condiciones de anisotropía o viscosidad. Evidentemente, la complejidad de las ecuaciones que deberían emplearse sería muy superior a la de este trabajo, pero permitiría predecir, por ejemplo, la propagación de las ondas a través de la membrana, efecto que ha sido despreciado en la parte analítica de este estudio, pero que sin embargo afectaba notablemente en las simulaciones numéricas. De esta forma, se obtendrían conclusiones más precisas y sujetas a menos suposiciones e hipótesis que las que aquí se consideran.

Otra ampliación de este trabajo sería el estudio de más modelos constitutivos de hiperelasticidad. Aunque ya se han considerado algunos de ellos, existen más modelos como el de Arruda-Boyce o el de Marlow, que además están presentes en la librería de Abaqus.

Por último, ya se comentó en la sección de introducción (1) las grandes similitudes entre este trabajo y el problema de la cavitación. Sería realmente interesante aplicar las conclusiones aquí obtenidas a problemas de tuberías por las que circulan líquidos, cuyas variaciones de presión pueden originar burbujas esféricas que deterioren el material. Problemas similares a este se producen también en neumáticos, o incluso a nivel biológico, como ocurre en el caso de los aneurismas, por ejemplo.

En resumen, ni la hiperelasticidad ni las oscilaciones en membranas esféricas finalizan con este estudio. Afortunadamente, es un campo de enorme alcance, con mucho futuro por delante y que goza de la publicación de importantes estudios a día de hoy.

7. Planificación y presupuestos

Este trabajo es teórico, y por lo tanto en los presupuestos del mismo se deben incluir las horas trabajadas por el tutor y el alumno, así como el coste de las herramientas informáticas empleadas. Para calcular las horas de trabajo se va a incluir a continuación la planificación según la cual se ha realizado el proyecto, además de un diagrama de Gantt en el anexo A con el que se calculará el tiempo total de trabajo.

Todo el proceso se inició a mediados de septiembre de 2017. La realización del trabajo se ha compaginado con el cuarto curso del grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales, además de unas prácticas en empresa extracurriculares a partir de marzo de 2018, por lo tanto, no ha habido una disposición total de tiempo para dedicarlo al trabajo. Para simplificar los cálculos, se va a suponer una dedicación media de dos horas por día laborable, y de cinco horas los fines de semana y festivos.

La primera fase del proyecto fue la comprensión general del tema del trabajo y sus objetivos, así como la búsqueda de información, especialmente acerca de los materiales hiperelásticos y su comportamiento. Esta fase abarcó un tiempo aproximado de un mes. A continuación, se realizaron todos los cálculos analíticos y se obtuvieron las correspondientes gráficas, proceso que ocupó aproximadamente los dos meses y medio restantes del año 2017. Una vez obtenidos los resultados teóricos, comienzan las simulaciones de elementos finitos y la obtención de las gráficas que se obtuvieron gracias a ellas. En general, todo el proceso de cálculo numérico necesitó aproximadamente de un mes y medio de tiempo. Durante el mes siguiente se llevaron a cabo las comparaciones entre ambos tipos de resultados, obteniendo de esta forma las conclusiones del trabajo. Aunque según se obtenían resultados se iban trasladando al documento escrito, a partir de marzo y hasta principios de mayo, se llevó a cabo íntegramente la redacción de la presente memoria, con las correspondientes revisiones por parte del tutor.

Siguiendo estas estimaciones aproximadas, se elaboró un proyecto con su correspondiente diagrama de Gantt empleando la herramienta informática ProjectLibre. Los detalles de este proceso se pueden encontrar en el Anexo A. Según esta herramienta, la duración del trabajo completo ha sido de unos 234 días, lo cual ha supuesto aproximadamente 700 horas dedicadas en total. Con estos datos y los costes horarios, los costes de personal (tutor y alumno) serían los expuestos en la Tabla 3.

	Dedicación (h)	Coste horario (€/h)	Coste total (€)
Tutor	50	40	2000
Alumno	650	15	9750
			Total=11750 €

Tabla 3: Costes de personal

Respecto a las herramientas informáticas, para la realización de este trabajo se han empleado los programas:

- Matlab (Mathworks): para la obtención de los resultados analíticos.
- Abaqus (Dassault Systèmes): para las simulaciones numéricas y sus resultados. Se ha supuesto la utilización de la licencia comercial.
- Microsoft Excel (Microsoft): para la obtención de las gráficas. Se ha empleado la versión Hogar y Estudiante.
- ProjectLibre: para la obtención de la duración del proyecto y el diagrama de Gantt. Este programa no ha generado gasto, ya que dispone de una licencia temporal gratuita.

Realmente los programas han sido proporcionados por la universidad así que no se ha producido un gasto directo en sus licencias. Sin embargo, para aportar veracidad al proyecto, se van a incluir sus costes en el presupuesto. Para ello, se ha buscado información online acerca de los precios de sus licencias, y se ha calculado su equivalente para los seis meses que aproximadamente ha durado el proyecto.

	Licencia (€)	Tipo de licencia	Tiempo	Coste Total (€)
Matlab	800	Anual	6 meses	400
Abaqus 2016	30000	Anual	6 meses	15000
Microsoft Office	149	Permanente	6 meses	149
ProjectLibre	0	Temporal	1 semana	0
				Total=15549 €

Tabla 3: Coste de herramientas informáticas

Por lo tanto, dado que no se han producido gastos de laboratorio o de materiales, sumando los costes de personal y los de herramientas informáticas el presupuesto total del trabajo sería de **27299 €**.

Anexos

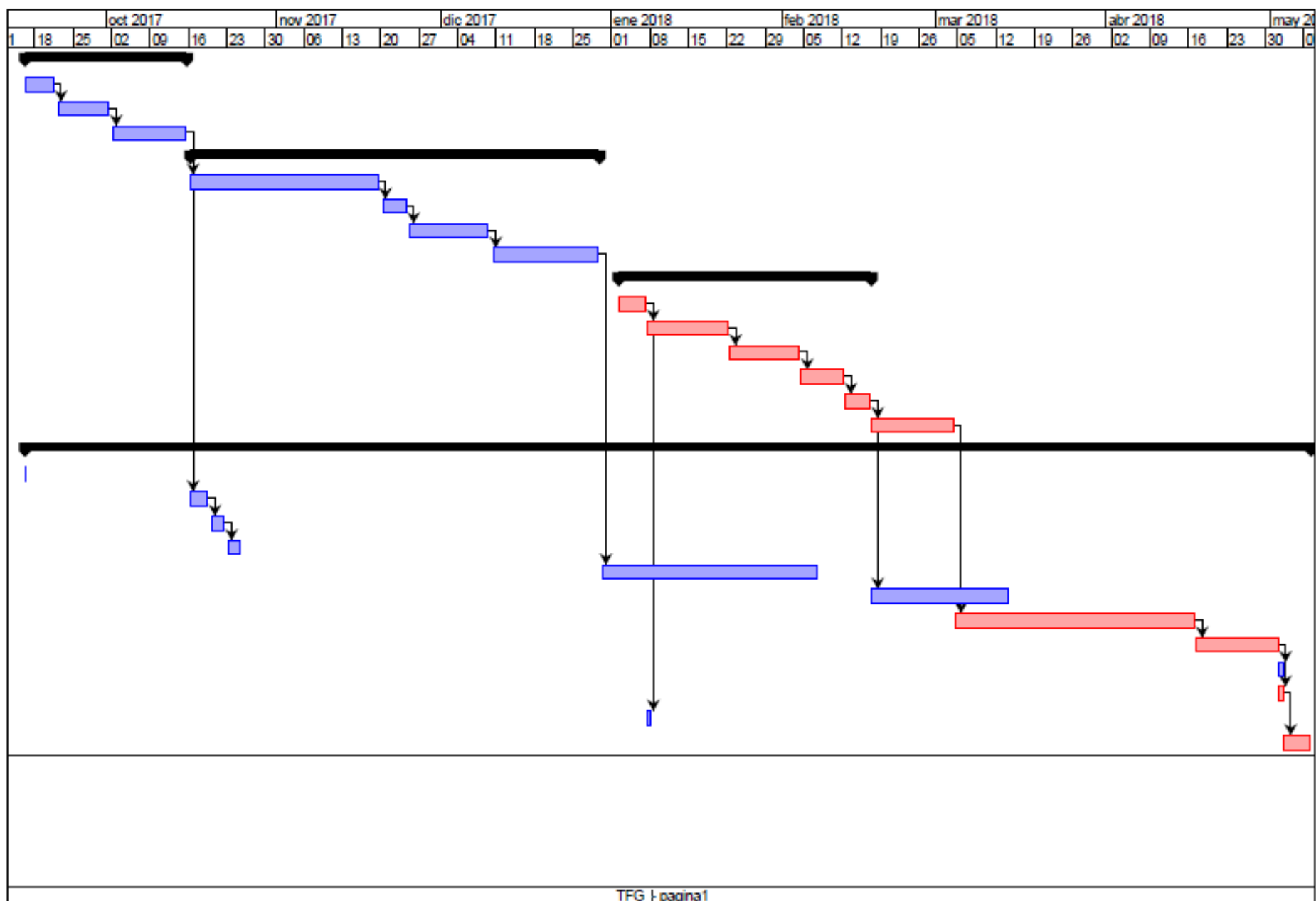
A. Diagrama de Gantt

En este anexo se va a incluir el diagrama de Gantt que permite obtener las horas empleadas en el trabajo completo. A pesar de que la duración de las tareas es estimada, esta herramienta aporta gran precisión a la sección 7. Para obtener estos datos se ha empleado el software ProjectLibre.

En primer lugar, se adjunta la captura de la tabla con las tareas y su duración, y en la siguiente página se incluye el diagrama de Gantt completo.

	Nombre	Duración	Inicio	Terminado	Predecesores
1	Búsqueda de información	30 days	16/09/17 8:00	15/10/17 17:00	
2	Comprensión del tema y objetivos	6 days	16/09/17 8:00	21/09/17 17:00	
3	Información sobre materiales hiperelásticos	10 days	22/09/17 8:00	1/10/17 17:00	2
4	Información sobre aplicaciones	14 days	2/10/17 8:00	15/10/17 17:00	3
5	Cálculos analíticos	75 days	16/10/17 8:00	29/12/17 17:00	
6	Operaciones matemáticas	35 days	16/10/17 8:00	19/11/17 17:00	4
7	Representación de funciones en Matlab	5 days	20/11/17 8:00	24/11/17 17:00	6
8	Exportación de datos analíticos a Excel	15 days	25/11/17 8:00	9/12/17 17:00	7
9	Análisis de resultados analíticos	20 days	10/12/17 8:00	29/12/17 17:00	8
10	Cálculos numéricos	46 days	2/01/18 9:00	17/02/18 9:00	
11	Búsqueda de datos de los materiales	5 days	2/01/18 9:00	7/01/18 9:00	
12	Simulaciones numéricas	15 days	7/01/18 9:00	22/01/18 9:00	11
13	Simulaciones de la hipótesis de pared delgada	13 days	22/01/18 9:00	4/02/18 9:00	12
14	Exportación de datos numéricos a Excel	8 days	4/02/18 9:00	12/02/18 9:00	13
15	Análisis de resultados numéricos	5 days	12/02/18 9:00	17/02/18 9:00	14
16	Comparación de resultados	15 days	17/02/18 9:00	4/03/18 9:00	15
17	Redacción de la memoria	234,125...	16/09/17 8:00	8/05/18 9:00	
18	Agradecimientos, resumen y abstract	1 day	16/09/17 8:00	16/09/17 17:00	
19	Introducción	4 days	16/10/17 8:00	19/10/17 17:00	4
20	Motivación y objetivos	3 days	20/10/17 8:00	22/10/17 17:00	19
21	Aportaciones originales	3 days	23/10/17 8:00	25/10/17 17:00	20
22	Formulación del problema	40 days	30/12/17 8:00	7/02/18 17:00	9
23	Modelo numérico	25 days	17/02/18 9:00	14/03/18 9:00	15
24	Análisis y resultados	44 days	4/03/18 9:00	17/04/18 9:00	16
25	Conclusiones	15 days	17/04/18 9:00	2/05/18 9:00	24
26	Trabajos futuros	1 day	2/05/18 9:00	3/05/18 9:00	25
27	Impacto social, planificación y presupuestos	1 day	2/05/18 9:00	3/05/18 9:00	25
28	Anexos	1 day	7/01/18 9:00	8/01/18 9:00	11
29	Revisiones	5 days	3/05/18 9:00	8/05/18 9:00	27

Fig. A.1: Tareas del trabajo



Bibliografía

- [1] F. D. Aranda Iglesias, “Dynamic radial deformations of nonlinear elastic structures. on the influence of constitutive modeling,” 2017.
- [2] V. Lefèvre, K. Ravi-Chandar, and O. Lopez-Pamies, “Cavitation in rubber: an elastic instability or a fracture phenomenon?” *International Journal of Fracture*, vol. 192, no. 1, pp. 1–23, 2015.
- [3] F. Karlsson and A. Persson, “Modelling non-linear dynamics of rubber bushings-parameter identification and validation,” *Lund University*, 2003.
- [4] L. Kari, “On the dynamic stiffness of preloaded vibration isolators in the audible frequency range: Modeling and experiments,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 113, no. 4, pp. 1909–1921, 2003.
- [5] T. K. Datta, *Seismic analysis of structures*. John Wiley & Sons, 2010.
- [6] Y. Bar-Cohen, “Electroactive polymers as artificial muscles: capabilities, potentials and challenges,” in *Robotics 2000*, 2000, pp. 188–196.
- [7] F. Carpi and E. Smela, *Biomedical applications of electroactive polymer actuators*. John Wiley & Sons, 2009.
- [8] M. Morata Cariñena, C. Cané Ballart, and E. Figueras Costa, *Resonadores micro-mecanizados para su aplicación en la detección de gases*. Universitat Autònoma de Barcelona,, 2004.
- [9] J. Rodriguez-Martinez, J. Fernandez-Saez, and R. Zaera, “The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 93, pp. 31–45, 2015.
- [10] R. W. Ogden, *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation, 1997.

- [11] R. Ogden, “Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 326, no. 1567. The Royal Society, 1972, pp. 565–584.
- [12] H. Hibbitt, B. Karlsson, and P. Sorensen, “Abaqus analysis user’s manual version 6.10,” *Dassault Systèmes Simulia Corp.: Providence, RI, USA*, 2011.
- [13] A. Bucchi and G. E. Hearn, “Predictions of aneurysm formation in distensible tubes: part b-application and comparison of alternative approaches,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 70, pp. 155–170, 2013.